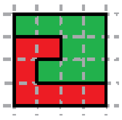
## Uitwerkingen wizPROF 2024

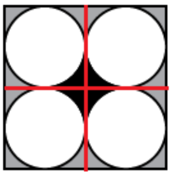
**1. A** $\frac{2\times 0{,}24}{20\times 2{,}4} = \frac{2\times 0{,}24}{2\times 10\times 10\times 0{,}24} = \frac{1}{100}$

**2. E** Het groene deel heeft horizontale balken van $4$, $2$ en $3$ blokjes, het rode deel van $2$, $1$ en $4$ blokjes.



**3. D** Tegenover het zijvlak met $3$ stippen zit het zijvlak met $4$ stippen. De hoekensom van punt $S$ is dus $1+2+4=7$. Net zo is de hoekensom van punt $R$ $2+3+6=11$ en van punt $Q$ $1+3+5=9$. De grootste hoekensom is dus $11$.

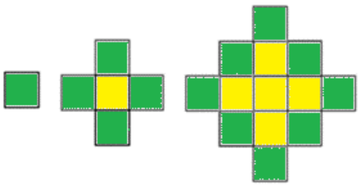
**4. C** Het plaatje hiernaast laat zien dat het kan worden opgedeeld in vier vierkanten met telkens een cirkel en vier gelijke gebieden, waarvan $1$ zwart en $3$ grijs. De verhouding zwart:grijs is daarom $1:3$.



**5. B** Tim zal vier van de lijnstukjes heen en weer moeten tekenen. Voor de kortste afstand neem je daarvoor de vier kortste. De kortste lengte is daarom $3+2\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 1+2\cdot 1+2=15$ cm.

**6. C** Maya springt $2023$ keer. Omdat ze begint in vierkant $1$ staat ze $2024$ keer in een vierkant. Per $4$ vierkanten raakt zij $3$ keer met haar linkervoet de grond. Dat gebeurt dus $\frac{2024}{4}\cdot 3=1518$ keer.

**7. D** In het plaatje hiernaast zie je de drie lagen van het volgende bouwwerk. De kubussen van het tweede bouwwerk zijn hierin geel gekleurd, de nieuwe kubussen zijn groen gekleurd.

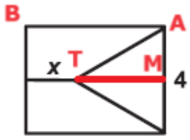


**8. E** Het getal $aba$ moet even zijn, dus $a$ is even. $aba$ moet zo groot mogelijk zijn, dus moet $a=8$. Het grootste getal van de vorm $8b8$ dat deelbaar is door $6$ is $888$ met cijfersom $8+8+8=24$.

**9. A** $OB$ is een deel van een diagonaal van vierkant $ABCD$, dus is $\angle OBC=45°$. De hoeken van een regelmatige zeshoek zijn $120°$, dus $\angle O=120°$.Verder is $\angle BCD\ =90°$. De hoeken van een vierhoek zijn samen $360°$, dus $\angle\alpha=360-120-45-90=105°$.

**10. C** De lengte en de breedte zijn samen $20$ meter. We kunnen $20$ op twee manieren schrijven als som van twee priemgetallen: $20=3+17=7+13$. De eerste mogelijkheid geeft oppervlakte $3\cdot 17=51$, de tweede $7\cdot 13=91$.

**11. B** $M$ (zie figuur hiernaast) is het midden van de gelijkzijdige driehoek, dus $MA = 2$ en $MT \perp AM$, zodat $M \ = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. De oppervlakte van de driehoek is dan $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.
De oppervlakte van de vlag is dan $3 \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$, dus $AB = 3\sqrt{3}$ en $x = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$.



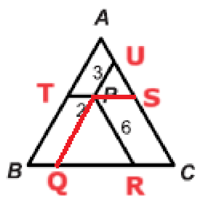

**12. B** In de eerste rij kunnen op $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ manieren de letters A, B, C en D worden geplaatst. Daarna is de onderste rij maar op één manier in te vullen. In de onderste rij hiernaast kan bijvoorbeeld onder de letter B niet de letters A en B komen (staan al in het eerste $2x2$ vierkant en ook niet de letter C (staat al in het tweede $2x2$ vierkant).
De onderste rij ziet er daarom als volgt uit: CDAB. Het aantal manieren is daarom $24 \cdot 1 = 24$.

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| | | | |

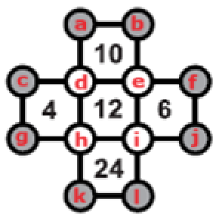
**13. D** Stel de oppervlakte van de witte cirkel is $w$, van de grijze cirkel is $g$ en van de zwarte cirkel is $z$. Dan is de oppervlakte van het zwarte gebied links gelijk aan $z - g$, dus $z - g = 7w$. Het zwarte gebied rechts is gelijk aan $z - g - w = 7w - w = 6w$. De verhouding is dus $7w{:}\,6w = 7{:}\,6$.

**14. B** Stel de leeftijden nu van Maria en haar dochter zijn $m$ en $d$ met uiteraard $m > d$. De pasgeboren kleindochter is over twee jaar $2$ jaar oud, dus weten we $2(m+2)(d+2) = 2024$ en $(m+2)(d+2) = 1012 = 1 \cdot 1012 = 2 \cdot 506 = 4 \cdot 253 = 11 \cdot 92 = 22 \cdot 46 = 44 \cdot 23$. Maar omdat $m$ en $d$ even moeten zijn, zijn ook $m+2$ en $d+2$ beiden even. Ook is $d+2 > 2$ (want $d > 0$), dus moet $m + 2 = 46$ en $d + 2 = 22$ zodat $m = 44$.

**15. C** Trek de lijnstukken $PQ$ en $PS$ evenwijdig aan $AB$ en $BC$. Dan zijn $\triangle PQR$ en $\triangle PUS$ gelijkzijdig, dus $QR = 6$ en $PS = 3$. De vierhoeken $BQPT$ en $RCSP$ zijn parallellogrammen, dus $BQ = 2$ en $RC = 3$. Nu is $BC = 2 + 3 + 6 = 11$, maar dan ook $AB = 11$ en $AC = 11$, zodat de omtrek van de driehoek $3 \cdot 11 = 33$ is.



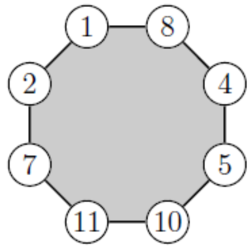

**16. B** Noem de getallen in de cirkels $a, b, \ldots, k, l$ zoals in het plaatje hiernaast. Dan is $dehi = 12$, $abdehikl = 10 \cdot 24 = 240$, zodat $abkl = \frac{240}{12} = 20$. Net zo is $cgfj = \frac{4 \cdot 6}{12} = 2$. Dus is het product van de getallen in de grijze cirkels gelijk aan $20 \cdot 2 = 40$.



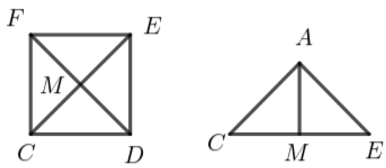

**17. C** In elke vaas staan "evenveel bloemen als het aantal vazen waar…", dus moeten er evenveel bloemen als vazen zijn. Een voorbeeld van een mogelijke verdeling over de vier vazen is $0$ bloemen in de vazen $1$ en $3$ en $2$ bloemen in de vazen $2$ en $4$.

**18. D** De grote kubus heeft ribben van $n$ kleine kubussen. Van elk zijvlak worden er dan $(n-2)^2$ kleine kubussen aan één kant geverfd. Er zijn dus $6(n-2)^2$ kleine kubussen met één geverfd vlak. De gehele binnenkant bestaat uit $(n-2)^3$ kleine kubussen die niet worden geverfd. Daarom is $(n-2)^3 = 6(n-2)^2 \Rightarrow (n-2)^2 = 0$ of $n-2 = 6 \Rightarrow n = 2$ (maar in dat geval zijn er geen kubussen met geen of één ongeverfd vlak) of $n = 8$.
Dus $n = 8$.

**19. E** Als één van de getallen bij de hoek een drievoud is, dan moeten alle getallen op de hoeken drievouden zijn. Maar er zijn maar vier drievouden van $1$ t/m $12$ ($3$, $6$, $9$ en $12$), te weinig voor de acht hoeken. De drievouden worden dus niet gebruikt. Hiernaast zie je een mogelijke invulling voor de achthoek.




**20. B** Het veelvlak bestaat uit een kubus met ribben van $1$ cm met aan de boven- en onderkant een regelmatige vierzijdige piramide met alle ribben $1$ cm lang. Het grondvlak van de piramide is het vierkant $CDEF$ (zie plaatje hiernaast) met $M$ het snijpunt van de diagonalen, $CM = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dan is de hoogte van de piramide




$AM = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}\cdot 2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

De afstand van $A$ tot $B$ is dus $\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$.

**21. C** Het kleinste priemgetal groter dan $47$ is $53$, dus moet $n < 53$. De eerste vier veelvouden van $13$ zijn $13$, $26$, $39$ en $52$. Dus is $n = 52$. De eerste veelvouden van $17$ zijn $17$, $34 = 2 \cdot 17$, $51 = 3 \cdot 17$ en $68 = 4 \cdot 17$. De macht van $17$ in het product is daarom $17^3$.

**22. C** De som van de cijfers van $n+1$ is kleiner dan die van $n$ en dat kan alleen maar als $n$ eindigt op een $9$ en $n+1$ daarmee op een $0$. De cijfersom $s$ van $n$ is dan $8$ groter dan de cijfersom van $n+1$.
Dus $s = 3(s-8) \Rightarrow s = 3s - 24 \Rightarrow s = 12$. De kleinste $n$ eindigend op een $9$ met cijfersom $12$ is $n = 39$.

**23. C** Carl kan uitspraak B niet doen als hij die dag de waarheid spreekt. Ook de uitspraken D en E kunnen niet tegelijk allebei waar zijn, dus zijn er minstens twee uitspraken die die dag een leugen zijn zodat Carl die dag loog. Uitspraak C is zeker waar, dus die heeft Carl die dag niet kunnen doen.

**24. D** De oppervlakte van de buitenkant van de kubus is $6 \cdot 3^2 = 54$. Het zwarte oppervlak moet daarom $18$ zijn.
Op de hoek van de grote kubus zie je $3$ zijvlakken van een kubusje, van een kubusje in het midden van een ribbe zie je $2$ zijvlakkken, van een kubusje in het midden van een zijvlak zie je er $1$ en van het kubusje binnen in de grote kubus zie je er $0$.
Daarom heb je minstens $6$ zwarte kubussen nodig voor oppervlakte $18 = 6 \cdot 3$ en maximaal $13 = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 0$.
Het verschil tussen maximaal en minimaal is derhalve $13 - 6 = 7$.

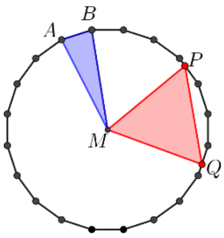
**25.D** Als alle getallen even vaak worden geworpen, dan worden ze allemaal $4$ keer geworpen. Het getal $1$ moet daarom minstens $5$ keer worden geworpen. In de volgende tabel staan de mogelijke aantal $1$ met de bijbehorende maximale som (natuurlijk zijn dan de aantallen hoogste getallen zo groot mogelijk):

| aantal $1$ | aantal $6$ | aantal $5$ | aantal $4$ | aantal $3$ | aantal $2$ | som |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 83 |
| 6 | 5 | 5 | 5 | 2 | 1 | 89 |
| **7** | **6** | **6** | **3** | **1** | **1** | **90** |
| 8 | 7 | 6 | 1 | 1 | 1 | 89 |
| 9 | 8 | 4 | 1 | 1 | 1 | 86 |
| 10 | 9 | 2 | 1 | 1 | 1 | 83 |
| 11 | 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 79 |
| 12 | 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 74 |

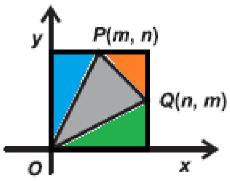
In de laatste twee rijen zie je dat de aantallen $5$, $4$, $3$ en $2$ steeds gelijk zijn aan $1$ veranderen, dat het aantal $6$ steeds minder wordt en het aantal $1$ steeds meer, dus de som wordt steeds kleiner. Dit zal uiteraard zo verder gaan: de maximale som is daarom $90$.

**26.C** Als $t$ de tijd in uren is die Olya met een snelheid van $2$ km/uur, dan heeft zij in die tijd $2t$ km afgelegd en de hele wandeling duurde $2t$ uur. Als $x$ de tijd is die zij liep met $4$ km/uur, dan heeft ze in die tijd $4x$ km afgelegd. De rest van de tijd, $2t - t - x = t - x$, liep ze met $3$ km/uur en legde toen $3(t - x)$ km af. Dat is de helft van de gelopen afstand, dus moet gelden $3(t - x) = 2t + 4x \Rightarrow 3t - 3x = 2t + 4x \Rightarrow t = 7x$. De totale tijd die Olya heeft gelopen is $2t = 14x$. Dus liep zij $\frac{1}{14}$ deel van de totale tijd met $4$ km/uur.

**27.B** Het product van alle overgebleven getallen is het kwadraat van het product van elk van beide groepen. Schrijf het product van $1$ t/m $25$ als een product van priemgetallen:
$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 24 \cdot 25 = 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$.
Als hiervan een kwadraat moet overblijven dan moeten alle exponenten even worden, dus moet je in ieder geval de priemgetallen $13$, $17$, $19$, en $23$ verwijderen alsmede een factor $7$. Het verwijderen van deze vijf getallen is ook voldoende blijkt uit het volgende voorbeeld:
$3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22 \cdot 24 = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 21 \cdot 25$
$= 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$



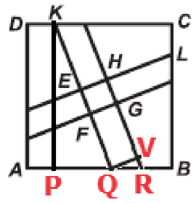

**28.C** De zwarte punten hiernaast zijn de twintig gelijkmatig verdeelde punten, de blauwe driehoek is gelijkbenig met tophoek $\angle AMB = \frac{360}{20} = 18°$. Het lijnstuk $PQ$ is even lang als de straal, zodat $\triangle PMQ$ gelijkzijdig is en $\angle PMQ = 60°$. Een lijnstuk tussen een paar zwarte punten is dus langer dan de straal als de bijbehorende middelpuntshoek gelijk is aan $4 \cdot 18 = 72°, \ldots, 9 \cdot 18 = 162°$. Bij elk zwart punt horen daarom $2 \cdot 6 = 12$ van de gezochte lijnstukken (met en tegen de klok in). Omdat op deze manier elk lijnstuk twee keer wordt geteld (voor elk eindpunt), is het aantal gezochte lijnstukken gelijk aan $\frac{20 \cdot 12}{2} = 120$.




**29.B** De rechthoek hiernaast heeft oppervlakte $n^2$, de blauwe en de groene driehoek hebben beide een oppervlakte $\frac{1}{2}mn$ en de oranje driehoek heeft een oppervlakte $\frac{1}{2}(n-m)^2$.
Dus moet $2024 = n^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}mn - \frac{1}{2}(n-m)^2 = n^2 - mn - \frac{1}{2}(n^2 - 2mn + m^2) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}m^2 = \frac{1}{2}(n^2 - m^2) = \frac{1}{2}(n+m)(n-m)$, zodat $(n+m)(n-m) = 4048$.
$m + n$ en $m - n$ zijn of beiden oneven of beiden even, dus beide even.
$4048 = 2^4 \cdot 11 \cdot 23 = 2 \cdot 2024 = 4 \cdot 1012 = 8 \cdot 506 = 22 \cdot 184 = 44 \cdot 92 = 88 \cdot 46$, zodat er $6$ paren $n$ en $m$ zijn (bedenk $n + m > n - m$):

| $n+m$ | $n-m$ | $n$ | $m$ |
|---|---|---|---|
| 2024 | 2 | 1013 | 1011 |
| 1012 | 4 | 508 | 504 |
| 506 | 8 | 257 | 249 |
| 184 | 22 | 103 | 81 |
| 92 | 44 | 68 | 24 |
| 88 | 46 | 67 | 21 |

**30.B** De oppervlakte van het vierkant is $5^2 = 25$, dus de oppervlakte links en rechts van de evenwijdige lijnen is $\frac{2}{5} \cdot 25 = 10$.




$KP \parallel AD$, $AP = KD = 1$, oppervlakte rechthoek $APKD = 5 \cdot 1 = 5$ en oppervlakte $\triangle KPQ = 5$. Dus moet $PQ = 2$ en $KQ = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.
De figuur is draaisymmetrisch over een hoek van $90°$, dus is $EFGH$ een vierkant. $QV \perp GH$, dus $\triangle QVR$ is rechthoekig en gelijkvormig met $\triangle KPQ$ omdat ook $\angle PQK = \angle QRV$ ($F$-hoeken). $PQ = 2$, $RB = AP = 1$, dus $QR = 1$ en $\triangle QVR = \frac{QR}{KQ} = \frac{1}{\sqrt{29}}$ keer zo groot als $\triangle KPQ$.

Derhalve is $EF = FG = QV = \frac{1}{\sqrt{29}} \cdot 5 = \frac{5}{\sqrt{29}}$ en oppervlakte vierkant $EFGH = \left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2 = \frac{25}{29}$.