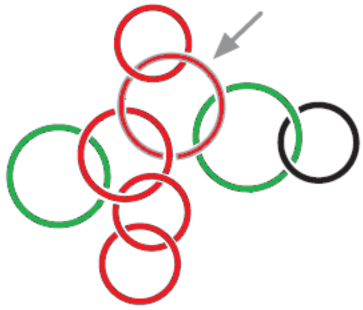
Uitwerkingen wizPROF 2018

1. C De derde zijde moet meer dan 5-2=3 zijn en minder dan 5+2=7 (anders heb je geen driehoek).

2. C De rode ringen zitten in elkaar, de groene liggen onder de rode ringen en zijn er los van. De langste ketting wordt dus gevormd door de vijf rode ringen.



3. C Een jongen in dit gezin heeft minstens twee broers, dus in dit gezin zijn er minstens drie jongens. Een meisje in dit gezin heeft minstens één zus, dus zijn er minstens twee meisjes in dit gezin. Het kleinste aantal kinderen dat dit gezin kan hebben is daarom 3+2=5.

4. B Het grootste getal waardoor je 42, 60 en 90 kunt delen is 6.

5. B S=9, R=0 en P+Q=6.

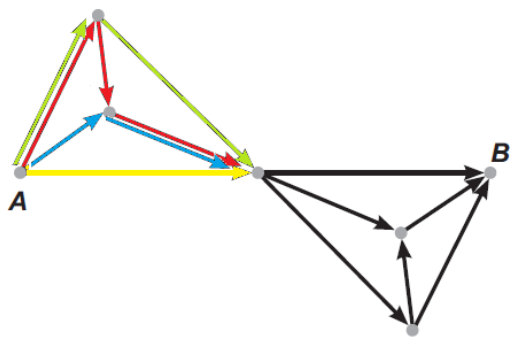
6. A In de figuur hiernaast kun je zien dat de oppervlaktes van de grijze gebieden X en Z allebei de helft van de zeshoek zijn. Hetzelfde geldt ook voor de oppervlakte van het grijze gebied Y.

7. D De middelste van vijf opeenvolgende getallen is gelijk aan het gemiddelde van die vijf getallen, dus gelijk aan hun som gedeeld door vijf: $\frac{10^{2018}}{5} = \frac{10 \cdot 10^{2017}}{5} = 2 \cdot 10^{2017}$

8. C zittende kat + tafel − liggende kat = 150 cm
liggende kat + tafel − zittende kat = 110 cm
Optellen van deze twee vergelijkingen levert 2×tafel = 260 cm, dus de tafel is 130 cm hoog.

9. A 25% van 2018 is gelijk aan $\frac{25}{100} \cdot 2018$, 2018% van 25 is gelijk aan $\frac{2018}{100} \cdot 25$. Dat is hetzelfde dus samen zijn ze 50% van 2018 ofwel de helft.

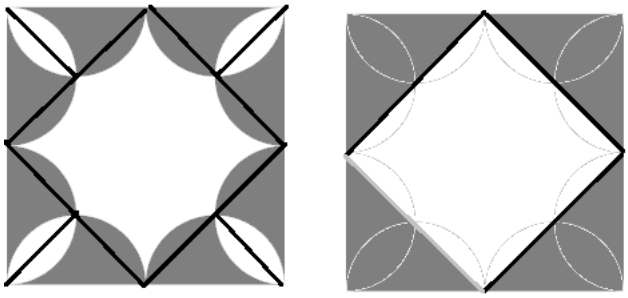
10. D Van A naar het midden zijn er vier mogelijkheden, zie het plaatje hiernaast. Hetzelfde geldt voor de routes van het midden naar B. Totaal zijn er dus $4 \cdot 4 = 16$ mogelijkheden.



11. D Noem de afstand van de eerste flat tot de bushalte a, dan is de afstand van de bushalte tot de tweede flat $250-a$ en is de totale loopafstand van de studenten samen gelijk aan $100a+150(250-a)=37500-50a$ en dat is zo klein mogelijk als a zo groot mogelijk is, dus als $a=250$. De bushalte komt dus voor de tweede flat.

12. D Eén 1, twee 2'en, drie 3'en, ... , veertien 14'en zijn samen 1+2+3+..+14=105 getallen. De getallen die deelbaar zijn door 3 zijn 3, 6, 9 en 12. Dat zijn er samen 3+6+9+12=30 getallen.

13. C Door witte en grijze gebieden om te wisselen zie je dat de oppervlakte van het witte gebied gelijk is aan de helft van de oppervlakte van het vierkant, dus aan $\frac{1}{2}\cdot 4^2=8$:



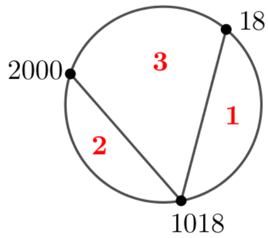
14. E Elke trein vertrekt uit een station en gaat naar een station. Totaal vertrekken en gaan de 40 treinen dus uit of naar $40\cdot 2=80$ stations. Luzern, Zürich, Bern en Basel worden in totaal 40 keer genoemd, de overige 40 treinen gaan naar of vertrekken uit Genève.

15. C Als Louise elk figuur één keer gemaakt heeft, dan heeft ze nog 41-12=29 lucifers over. Als ze zoveel mogelijk figuren wil maken dan moet ze zoveel mogelijk driehoeken maken. Dat kan op twee manieren: 8 driehoeken en 1 vijfhoek òf 7 driehoeken en 2 vierkanten. Louise kan dus maximaal 3+9=12 figuren maken.

16. A Als zijn vader p euro geeft en zijn oudste broer geeft b euro, dan geldt $p=\frac{1}{2}(b+10)=\frac{1}{2}b+5$ en $b=\frac{1}{3}(p+10)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}b+15\right)=\frac{1}{6}b+5$. Maar dan is $\frac{5}{6}b=5$, $b=6$ en $p=8$. Dus Peter krijgt $8+6+10=24$ euro.

17. D Als we $\overline{abc}$ schrijven voor een getal van drie cijfers, dan is $\overline{abc}=100a+10b+c$ (met $a\neq 0$). Het middelste cijfer weglaten geeft dan het getal $\overline{ac}=10a+c$. Dus geldt $100a+10b+c=9(10a+c)$. Na herleiden geeft dit $10a+10b=8c$, $10(a+b)=8c$. We zien dat $8c$ deelbaar moet zijn door 10, dus $c=0$ of $c=5$. Als $c=0$, dan moet $a+b=0$, dat kan dus niet. Dus moet $c=5$ en $a+b=4$. Dit geeft de volgende vier getallen: 135, 225, 315 en 405.

18. D $10^{2018} = 1000 \dots 000$ is een getal eindigend op 2018 nullen, dus $10^{2018} - 1 = 999 \dots 999$ en $\frac{1}{9}(10^{2018} - 1) = 111 \dots 111$ zijn getallen van 2018 cijfers. Maar dan is $\frac{1}{9} \cdot 10^{2018} \cdot (10^{2018} - 1\} = 111 \dots 111000 \dots 000$ een getal van $2 \cdot 2018 \ = \ 4036$ cijfers.



19. E Veelhoek 1 heeft als hoekpunten de nummers 18 tot en met 1018, dat zijn er 1018-18+1=1001. Veelhoek 2 heeft als hoekpunten de nummers 1018 tot en met 2000, dat zijn er 2000-1018+1=983. Veelhoek 3 heeft als hoekpunten de nummers 2000 tot en met 2018 (dat zijn er 2018-2000+1=19), 1 tot en met 18 (dat zijn er 18) en 1018, totaal 19+18+1=38 hoekpunten.

20. C Driehoek AKN is een vergroting met factor $\frac{1}{2}$ van driehoek ABC, de oppervlakte is dan $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ keer zo groot, dus 8. Ook is dan K het midden van AB, dus driehoek KBC heeft een oppervlakte 16 en is bovendien rechthoekig met schuine zijde BC. BC=AC, dus de rechthoekige driehoek MNC met schuine zijde NC is een vergroting met factor $\frac{1}{2}$ van driehoek KBC, de oppervlakte is dan $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ keer zo groot, dus 4. MC is dan de helft van KB, dus een kwart van AB=BC. BM is dan $\frac{3}{4}$ van BC, dus driehoek LBM is een vergroting met factor $\frac{3}{4}$ van driehoek KBC, de oppervlakte is dan $(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$ keer zo groot, dus 9. Vierhoek KLMN heeft daarom een oppervlakte 32-8-4-9=11.

21. B De 13% inwoners van Oostenrijk zijn dezelfde als de 65% inwoners van Stiermarken die niet in Graz wonen. Dus 1% van de Oostenrijke inwoners komt overeen met 5% van de inwoners van Stiermarken; 20% van de Oostenrijkse inwoners komt dan overeen met 100% inwoners van Stiermarken.

22. B De getallen behalve 2018 hebben som 0 en product 1. Die getallen moeten dan 1 en -1 zijn, allebei een even aantal keren. Het aantal van deze getallen is deelbaar door 4. Het aantal getallen dat Yasmine heeft opgeschreven is daarom een viervoud + 1.

23. C Noem de vier getallen a, b, c en d. Dan is het gemiddelde van a, b en c gelijk aan $\frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$. Nu volgt uit de gegevens:

$\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + d = 17$

$\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + c + \frac{1}{3}d = 21$

$\frac{1}{3}a + b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d = 23$

$a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d = 29$

Optellen van deze vier vergelijkingen geeft dan:

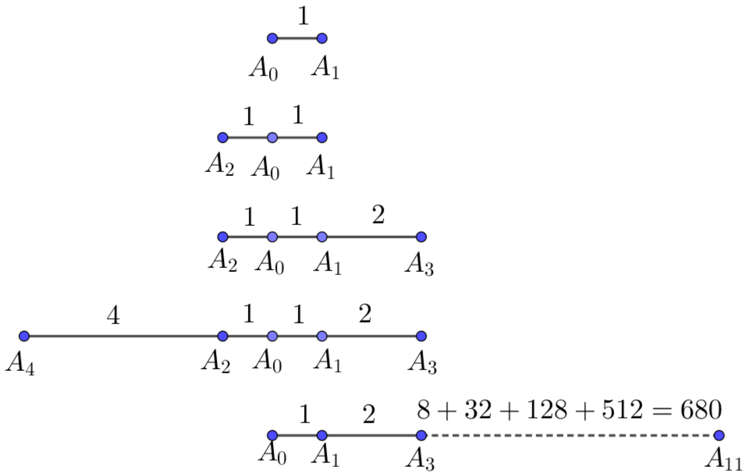
$90 = 17 + 21 + 23 + 29 = 2a + 2b + 2c + 2d$, dus $a + b + c + d = 45$ en $\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d = 15$.

Dit combineren met de vier vergelijkingen geeft dan

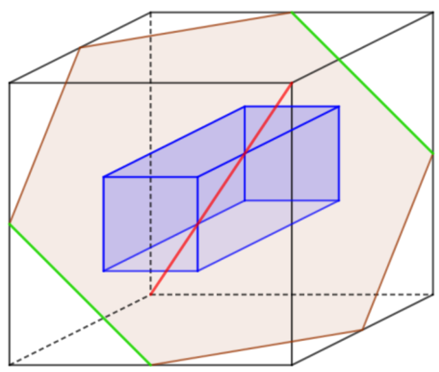
$\frac{2}{3}d = 17 - 15 = 2$, $\frac{2}{3}c = 21 - 15 = 6$, $\frac{2}{3}b = 23 - 15 = 8$ en $\frac{2}{3}a = 29 - 15 = 14$.

Dus het grootste getal is $a = 21$.

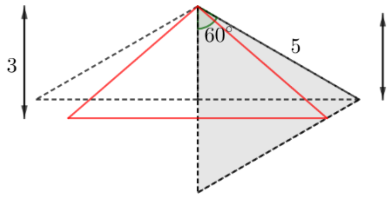
24. E In het plaatje hiernaast zie je de eerste paar stappen om alle punten te tekenen. .Je ziet dan achtereenvolgens dat $A_0A_2 = 1$, $A_1A_3 = 2$ en $A_2A_4 = 4$. Zo doorgaand vind je $A_0A_{11} = A_0A_1 + A_1A_3 + \cdots A_9A_{11} =$ $1 + 2 + 8 + 32 + 128 + 512 = 683$



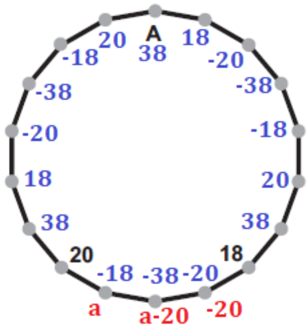
25. D In het plaatje hiernaast zie je de kubus met (bruin) het zaagvlak loodrecht op de lichaamsdiagonaal (rood). In het blauw zie je één van de tunnels getekend. Je ziet dat deze dichtbij de groene randen van het zaagvlak uitkomt. Deze groene randen liggen in het voor- en achtervlak, precies de zijvlakken tussen welke de tunnel loopt. Hetzelfde geldt ook voor de andere tunnels. De tunnels zorgen dus voor punten dichtbij de randen van het zaagvlak, precies zoals je in antwoord D ook ziet.



26. C Neem de gelijkbenige driehoek met als hoekpunten de middelpunten van de grijze cirkel en twee witte cirkels (met diameter 9-1=8) naast elkaar, zie hiernaast. Deze driehoek is gelijkbenig met gelijke zijden gelijk aan 1+4=5 en basiszijde 4+4=8. De tophoek van deze driehoek is meer dan 90°: neem een gelijkbenige rechthoekige driehoek met gelijke rechthoekszijden van 5. Dan is de schuine zijde gelijk aan $\sqrt{50} < 8$. De tophoek van de rode is daarom meer dan 90°. Ook is de tophoek minder dan 120°: als de tophoek 120° is, dan is de halve tophoek 60° en is de driehoek de helft van een gelijkzijdige (grijze) driehoek. Dan zou de hoogte van de driehoek $2\frac{1}{2}$ zijn geweest. De rode driehoek heeft hoogte 3, dus moet de halve tophoek kleiner dan 60° zijn. Er passen dus 3 rode driehoeken in de figuur maar ook niet meer. (de tophoek ligt tussen 90° en 120°)



27. D Ga vanaf 20 tegen de klok in. Het eerste getal dat je tegenkomt noemen we a (rood geschreven). Het getal daarna is dan $a - 20$, want $20 + a - 20 = a$. Het getal daarna moet dan -20 zijn. Maar dan moet $a - 20 + 18 = -20$, zodat $a = -18$ (blauw). Nu kun je de hele 18-hoek vullen.



28. D Er zijn twee mogelijke afmetingen voor een rechthoek met 2018 vierkantjes: 1x2018 en 2x1009.
Als de rechthoek 1 hoog is, dan kan een deel van de rechthoek er uit zien als hieronder.

1	■	1	0	1	■	■	1	1	■	2	■	2	■	1

Je ziet dan dat in de lege vierkantjes maximaal een 2 kan staan en dat de grootste som die je kunt krijgen voortkomt uit een rechthoek met om en om lege en zwarte vierkantjes. De som is dan $1009 \times 2 = 2018$.
Als de rechthoek 2 hoog is, dan kan een deel van de rechthoek er uit zien als hieronder.

0	1	1	■	2	2	■	1	2	■	3	■	2	■	■
1	■	1	2	■	■	2	1	■	3	■	2	1	■	2

Je ziet dan dat in de lege vierkantjes maximaal een 3 kan staan en dat de grootste som die je kunt krijgen voortkomt uit een rechthoek met in elke kolom een zwart vierkantje, om en om hoog en laag. In alle lege vierkantjes staat dan een 3, behalve in die aan de linker- en rechterrand, daarin staat een 2. De maximale som is dan $1007 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 3025$.

29. **E** In de bovenste rij moet van elk van de paren 1,4; 2,5 en 3,6 één getal staan. Dat geeft $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ keuzemogelijkheden. Bij elk van deze keuzes zijn er $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ mogelijke volgorden. Dat geeft $6 \cdot 8 = 48$ mogelijke manieren om de bovenste rij in te vullen. Bij elke bovenste rij is er maar één mogelijke rij beneden. Is bijvoorbeeld de bovenste rij 2, 6, 1 dan moet de onderste rij 4, 3, 5 zijn. Er zijn dus 48 manieren om de tabel te vullen.

30. **C** Noem de lengte van de ribben van de grote kubus r. De niet geverfde kleine kubusjes vormen een balk waarvan de lengte, de breedte en de hoogte minimaal $r-2$ en maximaal r zijn. De hoeveelheid niet geverfde kubusjes is dan minstens $(r-2)^3$ en maximaal r^3. Maar dan moet $(r-2)^3 \leq 45 \leq r^3$. Nu moet $r \leq 5$ (vanwege de linker ongelijkheid) en $r \geq 4$ (vanwege de rechter ongelijkheid). Dit geeft voor de balk niet geverfde kubusjes de volgende mogelijkheden: 2x2x2, 2x2x3, ... , 4x5x5 en 5x5x5. De enige mogelijkheid om dan aan 45 kubusjes te komen is de balk met afmetingen 3x3x5. De grote kubus heeft dan afmetingen 5x5x5, waarvan 4 zijvlakken zijn geverfd, zie het plaatje.