Uitwerkingen wizProf 2009

1. **B** $2+0+0+9=11$; $(2+0)\cdot(0+9)=2\cdot 9=18$; $200-9=191$; $2^9=512$

2. **C** Voor Gerard eindigden 502 deelnemers, achter Gerard 1506. $3 \times 502 = 1506$

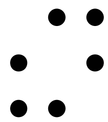
3. **E** Het vijfde getal moet 15-6=9 zijn, het zevende getal is dan 9+15=24.

4. **B** Een $\frac{1}{2}$ van $\frac{2}{3}$ is $\frac{1}{3}$. Een $\frac{1}{2}$ van $\frac{2}{3}$ van $\frac{3}{4}$ is dan $\frac{1}{3}$ van $\frac{3}{4}$ is $\frac{1}{4}$. Zo doorgaand zie je dat $\frac{1}{2}$ van $\frac{2}{3}$ van $\frac{3}{4}$ van $\frac{4}{5}$ van $\frac{5}{6}$ van $\frac{6}{7}$ van $\frac{7}{8}$ van $\frac{8}{9}$ van $\frac{9}{10}$ van 1000 gelijk is aan $\frac{1}{10}$ van 1000, ofwel 100.

5. **B** Alle oneven cijfers die direct gevolgd worden door een even cijfer zijn alle negens behalve de laatste. Harold telt dus 2008 keer het cijfer 9 op. De uitkomst is dan 2008 x 9 = 18 072.

6. **C** De mogelijkheden A (bijvoorbeeld 1-5-5-5), B (bijvoorbeeld 3-3-5-5), D (bijvoorbeeld 4-4-3-5) en E kunnen door Mieke behaald zijn. Maar als Mieke precies 3 keer 3 punten heeft gescoord (C), dan moet zij in de ontbrekende beurt 7 punten scoren en dat kan niet.

7. **C** Er moet in elk geval van elke horizontale rij één stip weg. Dus moeten er minstens 3 stippen weg. Met 3 stippen lukt het ook, zie het plaatje.



8. **E** Omdat de hoeken in een driehoek samen 180° zijn, vormen de drie witte hoekpunten samen een halve cirkel met straal 2. De oppervlakte van deze drie hoekpunten samen is daarom $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2=2\pi$.

9. **A** De beide andere hoeken zijn samen 180° - 68° = 112°. Daarom zijn de twee hoeken in de kleine driehoek rechts samen $112°\div 2=56°$. De hoek met het vraagteken is dus 180° - 56° = 124°.

10. **D** $\sqrt{81}=9$ en $\sqrt{121}=11$. Dat zijn dus de getallen 82, 83, ..., 120. In totaal 39 getallen (tel maar na).

11. **A** De hoekpunten boven en onder hebben allebei een 1, de hoekpunten in de middenlaag allemaal een 5.

12. **A** Als je in de figuren B, C en D de bovenste ring los knipt, dan zijn de onderste twee ringen nog steeds vast. In figuur E kun je de rechtse ring er zo afnemen. Dus de figuren B t/m E zijn geen Borromeaanse ringen. In figuur A ligt de bovenste ring boven op de linker ring, de linker ring ligt boven op de rechter ring en de rechter ring ligt boven op de bovenste ring. Dus deze drie ringen zijn niet los te halen, maar zodra je een van de ringen doorknipt, dan wel. Daarom zie je de Borromeaanse ringen in figuur A.

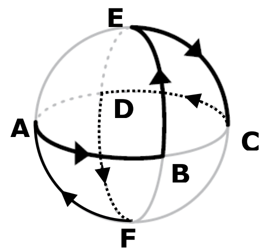
13. **D** Als de voorste man de waarheid spreekt, dan liegen alle mannen achter hem. Nummer 3 in de rij liegt dan. Maar nummer 3 zegt dat nummer 2 liegt, dus spreekt nummer 2 de waarheid. Dus heeft de voorste man geen gelijk en spreekt niet de waarheid.
De voorste man moet dus wel liegen. Maar dan spreekt nummer 2 de waarheid, moet nummer 3 weer liegen, enzovoort. De oneven nummers liegen dus allemaal en de even nummers spreken allemaal de waarheid.

14. D Alleen van de positieve gehele getallen 1 (1^2=1; 1^3=1), 2 (2^2=4, 2^3=8) en 4 (4^2=16, 4^3=64) hebben de kwadraten evenveel cijfers als de derde machten.

15. C $\frac{2009}{2008} = \frac{2008}{2008} + \frac{1}{2008} = 1 + \frac{1}{2008} > 1 + \frac{1}{10000} = 1{,}0001$.
$\frac{20009}{20008} = \frac{20008}{20008} + \frac{1}{20008} = 1 + \frac{1}{20008} < 1 + \frac{1}{10000} = 1{,}0001$.
Dus $\frac{20009}{20008} < 1{,}0001 < \frac{2009}{2008}$. We moeten dus 3 nullen plaatsen.

16. D Naast een 1 mag elk getal staan, naast een 2 alleen een 1, 4, 6, 8 of 10. Naast een 3 kan alleen een 1, 6 of 9 staan. Naast een 4 een 1, 2 of 8. Naast een 5 een 1 of 10. Naast een 6 een 1, 2 of 3. Naast een 7 alleen een 1. Naast een 8 een 1, 2 of 4. Naast een 9 een 1 of 3. Naast een 10 een 1, 2 of 5. Het lukt daarom niet om 10 getallen op een rij te krijgen. Je kunt er wel 9 op een rij krijgen: 6-3-9-1-4-8-2-10-5.

17. A Geef de "snijpunten" van de hoepels een naam, zoals hiernaast. Dan is de route ABECDFA. Na 6 kwart hoepels is het lieveheersbeestje terug in het beginpunt A.



18. C 3♥5=3·5+3+5=23. 2♥ $x = 2x + x + 2 = 3x + 2$.
Dus $3x + 2 = 23$, waaruit volgt $x = 7$.

19. D Piet heeft twee mogelijkheden. Begint hij met een 1 of een 3, dan moet het tweede cijfer een 2 zijn en komt daarna op elke oneven plaats een 1 of een 3 en op elke even plaats een 2. Er zijn 2x2x2x2x2=32 van dergelijke getallen. Begint Piet met een 2, dan komt er op elke oneven plaats een 2 en op elke even plaats een 1 of een 3. Ook van deze getallen zijn er 32.

20. B Schrijf 0,24 als een breuk en vereenvoudig deze zover mogelijk: $0{,}24 = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$.
Het kleinst aantal mogelijke mensen is nu 31: 6 brildragers en 25 mensen die geen bril dragen.

21. C Als r de straal van de grote cirkel is, dan is de zijde van het vierkant gelijk aan $1 + r$. De diagonaal van het vierkant is $2r$. Volgens de stelling van Pythagoras geldt nu $(1+r)^2 + (1+r)^2 = (2r)^2$. Met bijvoorbeeld de a,b,c-formule vind je dan $r = 1 + \sqrt{2}$ of $r = 1 - \sqrt{2}$. In het laatste geval zou r negatief zijn en dat kan natuurlijk niet. Dus moet $r = 1 + \sqrt{2}$.

22. E Met 2009 gelijke kubusjes kun je vier verschillende balken maken. Het aantal stickers is de som van de oppervlakten van de zijkanten. Dit geeft de volgende tabel:

lengte	breedte	hoogte	aantal stickers
2009	1	1	8038
287	7	1	4606
41	49	1	4198
41	7	7	1246

Susan heeft dus 1246 stickers geplakt en er daarom nog 2009-1246 = 763 over.

23. B De kleinst mogelijke rij- en kolomtotalen zijn de getallen 0, 1, 2, tot en met 7. Totaal heb je dan 28 stenen. Maar elke steen heb je dan dubbel geteld, één keer in een rij en ook één keer in een kolom. Je hebt daarom minimaal 14 stenen nodig. Met 14 lukt het ook, zie de tabel hieronder.

0	0	0	0
6	0	0	1
0	4	0	0
0	1	2	0

24. D Elke vrucht heeft maximaal twee verschillende buren in de rij. Elke soort moet drie verschillende buren hebben. Elke soort moet daarom twee keer in de rij staan, je hebt dus minstens acht vruchten nodig. Daar lukt het ook mee, zoals de volgende rij laat zien: mandarijn-appel-peer-mandarijn-banaan-appel-peer-banaan.

25. B Voor elk getal n geldt $n^2-1=(n-1)\cdot(n+1)$. Daarom zien we snel het volgende:

$(2^2-1)=1\cdot 3=3$;

$(2^2-1)\cdot(3^2-1)=3\cdot 2\cdot 4=2^3\cdot 3$;

$(2^2-1)\cdot(3^2-1)\cdot(4^2-1)=2^3\cdot 3\cdot 3\cdot 5=2^3\cdot 3^2\cdot 5$;

$(2^2-1)\cdot(3^2-1)\cdot(4^2-1)\cdot(5^2-1)=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 4\cdot 6=2^6\cdot 3^3\cdot 5$;

$(2^2-1)\cdot(3^2-1)\cdot(4^2-1)\cdot(5^2-1)\cdot(6^2-1)=2^6\cdot 3^3\cdot 5\cdot 5\cdot 7=2^6\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7$;

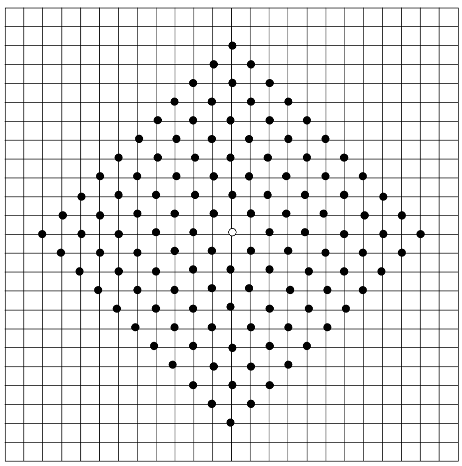
$(2^2-1)\cdot(3^2-1)\cdot(4^2-1)\cdot(5^2-1)\cdot(6^2-1)\cdot(7^2-1)=2^6\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 6\cdot 8=2^{10}\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$;

$(2^2-1)\cdot(3^2-1)\cdot(4^2-1)\cdot(5^2-1)\cdot(6^2-1)\cdot(7^2-1)\cdot(8^2-1)=2^{10}\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 7\cdot 9=2^{10}\cdot 3^6\cdot 5^2\cdot 7^2$

en dat is het kwadraat van $2^5\cdot 3^3\cdot 5^1\cdot 7^1$

26. C Als je het eerste getal en het laatste getal uit de overgebleven rij met elkaar vermenigvuldigt, dan krijg je het positieve gehele getal. Dus moet dat getal gelijk zijn aan 45 keer het kwadraat van het eerste getal. Het positieve gehele getal is daarom zeker te delen door 3. Het eerste getal is daarom 2 of 3. Het laatste getal is dan 2x45=90 of 3x45=135. Het positieve gehele getal is dus 2x90=180 of 3x135=405.

27. B Hiernaast staan de punten waar Skippy in tien sprongen kan komen. Ze vormen een vierkant van 11 bij 11 roosterpunten. Dat zijn 121 roosterpunten.



28. **C** Je kunt de ruit opdelen in twee gelijkzijdige driehoeken, beide met oppervlakte 9, zie het plaatje. De zijde van de bovenste driehoek is dan 3 x zo groot als de zijde van het kleintje; dus is de hoogte ook 3 x zo groot. De gehele driehoek is dan 3+3+1=7 x zo groot en heeft daarom een 49 x zo grote oppervlakte als het kleine driehoekje. De twee trapezia hebben daarom beide een oppervlakte die de helft is van 49-18-1=30.

29. **A** Omdat 1+15=16, 2+14=16, 3+13=16, 4+12=16, 5+11=16, 6+10=16 en 7+9=16, moet Thomas in elk geval van elk van de paren 1 & 15, 2 & 14, 3 & 13, 4 & 12, 5 & 11, 6 & 10 en 7 & 9 één kaart weghalen. Hij moet daarom in elk geval 7 kaarten weghalen. Als hij de kaarten 2, 4, 6, 8, 9, 11, 13 en 15 overhoudt, dan is de som van elk tweetal geen kwadraat, dus hoeft hij ook maar 7 kaarten weg te halen.

30. **E** De lengte van de rechthoekszijden van de witte rechthoekige driehoek zijn 36 en $81-x$. De zijde van het vierkant is daarom $81-x$.
De oppervlakte van het vierkant moet gelijk zijn aan de oppervlakte van de rechthoek; die is $81\cdot 36=9^2\cdot 6^2=54^2$. Maar dan moet $81-x=54$. Hieruit volgt dat $x=27$.