Uitwerkingen Prof

1. **A** De letter 'c' moet in emmer 4, de letter 'b' daardoor in emmer 5, de letter 'e' vervolgens in emmer 3 en de letter 'd' in emmer 2. Voor emmer 1 blijft dan letter 'a' over.

2. **C** Alex doet er 30 seconden over, Berend 36 seconden.

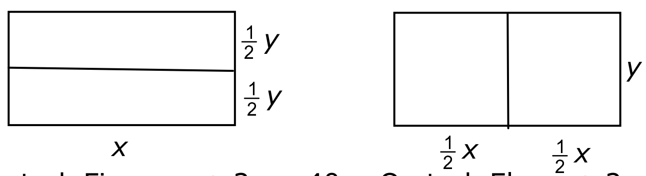
3. **A** $2-(-4)=6$, $(-2)\cdot(-3)=6$, $2-8=-6$, $0-(-6)=6$ en $(-12):(-2)=6$

4. **C** Volgens de stelling van Pythagoras is $AB^2 = 3^2+2^2=13$

5. **D** De langste rijen letters die Alex mag maken zijn KNOR, ANOR en AGOR.

6. **E** In de laatste kolom zie je dat H+E moet eindigen op een A. In de tweede kolom zie je dat E+H niet eindigt op een A, dus moet er een 1 zijn meegenomen van de laatste kolom. Maar dan moet 1+H+E eindigen op een H, dus moet 1+E wel 10 zijn en E derhalve een 9.

7. **C**



Omtrek Fiona: $x + 2y = 40$ Omtrek Els: $y + 2x = 50$
Kennelijk is x 10 groter dan y. Dan moet x 20 zijn en y 10.
Dus was de omtrek van het velletje 60 cm.

8. **B** Hou het plaatje met de opgave maar omgekeerd voor de spiegel.

9. **C** Een kubus heeft 12 ribben. Nu komen er voor elk van de 8 hoekpunten 3 bij.

10. **B** Na het eerste spel heeft Ismael 3 punten achterstand op het gemiddelde van 4. Elk volgend spel haalt hij 5 punten en loopt hij van die achterstand dus 1 punt in. Om de achterstand weg te werken heeft hij dus drie spellen nodig. In totaal heeft Ismael 4 keer gespeeld.

11. **E** Als je de vijf uitslagen tot een kubus probeert te vouwen, dan zie je dat dat niet mogelijk is bij de uitslagen 3 en 5.

12. **D** Het laatste cijfer op de kaarten is òf een 3 òf een 8. De som van een aantal kaarten moet eindigen op een 0. Dat kan alleen met 0x3 en 5x8, 2x3 en 3x8 of 4x3 en 1x8. Josine heeft dus 5 kaarten nodig, bijvoorbeeld 3, 13, 23, 33 en 28.

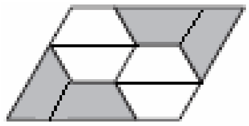
13. **D**

Gerard	3 even	2 even 1 oneven	1 even 2 oneven	3 oneven
Hafida	2 oneven	1 even en 1 oneven of 2 oneven	2 even of 1 even en 1 oneven of 2 oneven	2 even of 1 even en 1 oneven

In bovenstaande tabel zijn de mogelijkheden voor Hafida gegeven bij iedere mogelijke trekking van Gerard. De enige mogelijkheid waarbij Gerard zeker weet dat Hafida een even totaal heeft is dat Gerard de 3 even kaarten (2, 4 en 6 - totaal 12) heeft.

14. C Neem de verticale lijn door het middelpunt van de cirkel. Deze ligt even ver van E als van F. Dus ligt deze lijn $4+\frac{1}{2}\cdot 5=6\frac{1}{2}$ cm van punt A. De lijn ligt ook even ver van H als van G. DH = 3, dus de lijn ligt $6\frac{1}{2}-3=3\frac{1}{2}$ cm van H, waaruit volgt GH = $2\cdot 3\frac{1}{2}=7$ cm.

15. E Kijk naar het plaatje hiernaast. Je ziet dan dat het grijze gedeelte bestaat uit 4 van de 8 trapezia.



16. B Het verschil tussen a en e is 12, zodat óf a en e beide deelbaar zijn door 3 óf geen van beide. Op deze manier kun je het volgende concluderen.
Of a, b, e en f zijn allen deelbaar door 3, óf c is deelbaar door 3 óf d is deelbaar door 3.
Of a, c, d en f zijn alle deelbaar door 5, óf b is deelbaar door 5 óf e is deelbaar door 5.
Dus moeten a en f deelbaar zijn door 3 en 5 en daarom ook door 15.

17. B De oudste is 4 jaar ouder dan de vijfde, de tweede is 4 jaar ouder dan de zesde en de derde is 4 jaar ouder dan de jongste. De oudste drie zijn dus samen 3x4=12 jaar ouder dan de jongste drie samen zijn.

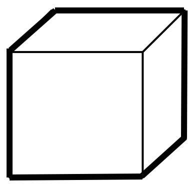
18. E Alex moet dus zoveel mogelijk 8'en overhouden (en als het nodig is nog een aantal 2'en). Het getal 2008 komt 1000/4=250 keer voor. 250 8'en geeft som 2000. Je hebt dus nog 4 2'en nodig. Er moeten dus minimaal 254 cijfers blijven staan. Maximaal kan Alex dus 1000−254=746 cijfers wegstrepen.

19. D Driehoek ABC is gelijkbenig, dus ∠B=∠A=2•. In driehoek ABD bereken je nu ∠ADB =180°−3•. Ook is ∠ADB + ∠ADC = 180°, dus ∠ADC = 3•. Dus 3•=105°, •=35° en ∠A=2•=70°.

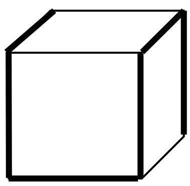
20. B Als $a\times b=a:b$, dan geldt (vermenigvuldig beide kanten met b) $ab^2=a$, ofwel $ab^2-a=0$, $a(b^2-1)=0$, dus $a=0$ (maar dan moet ook $b=0$ en dat kan niet - je kunt niet delen door nul) of $b^2=1$. Dus moet $b=1$ of $b=-1$.
$b=1$ invullen in $a+b=a\times b$ geeft $a+1=a\times 1=a$, maar dat kan niet.
$b=-1$ invullen in $a+b=a\times b$ geeft $a-1-a\times -1=-a$, waaruit volgt $a=\frac{1}{2}$.
Dus alleen $b=-1$ en $a=\frac{1}{2}$ is zo'n tweetal.

21. D Proberen geeft de volgende mogelijkheden: 101123, 112358, 202246 en 303369. (Begin je bijvoorbeeld met 12 dan lukt het niet: 12358… kun je niet met een cijfer afmaken)

22. E Als de drie zijvlakken die je hiernaast kunt zien rood zijn, dan zijn de kubusjes die op de vet gedrukte ribben liggen de kubusjes met een rood én een blauw zijvlak. Dit zijn er 12.



Als in de kubus hiernaast het voorvlak, het bovenvlak en het (hier niet zichtbare) achtervlak rood zijn, dan liggen de kubusjes met een rood én een blauw zijvlak op de nu vetgedrukte ribben (op het achtervlak precies zo als op het voorvlak). Dit zijn er 16.

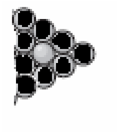


23. D $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16 =$
$2\cdot 3\cdot 2^2\cdot 5\cdot 2\cdot 3\cdot 7\cdot 2^3\cdot 3^2\cdot 2\cdot 5\cdot 11\cdot 2^2\cdot 3\cdot 13\cdot 2\cdot 7\cdot 3\cdot 5\cdot 2^4 =$
$2^{15}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13$ (bedenk dat bijvoorbeeld $12 = 4\cdot 3 = 2^2\cdot 3$)

24. D De driehoek gevormd door de drie middelpunten heeft zijden 1+2=3, 1+3=4 en 2+3=5. Er geldt: $5^2 = 3^2 + 4^2$, dus is volgens de stelling van Pythagoras de driehoek rechthoekig. Dat betekent dat de dikgetekende cirkelboog een hoek bestrijkt van 270°, dus een lengte heeft van $\frac{3}{4}\cdot 2\pi\cdot 1 = \frac{3}{2}\pi$.

25. A De som van alle zijvlakken is gelijk aan 2+3+4+5+6+7+8+9=44, dus in elk hoekpunt is de som 22 (want boven + onder = 44). Dit geeft voor het onderste hoekpunt $e+9+3+h=22$, ofwel $e+h=10$. Voor een van de hoekpunten in het midden geldt $b+c+9+3=22$, dus ook $b+c=10$. Maar dat betekent dat b, c, e en h de even getallen 2, 4, 6 en 8 (in de een of andere volgorde) moeten zijn en a het enige overgebleven oneven getal 7.
Maar dan moet $22 = a+b+e+9 = 16+b+e$, zodat $b+e=6$.

26. B Van de drie bovenste lagen liggen alle ballen aan de buitenkant. Van de vierde laag is één bal wit (zie hiernaast). Van de vijfde t/m de zevende laag is een steeds grotere driehoek wit. De onderkant is uiteraard ook zwart, zodat er in totaal een 4-piramide wit is.



27. A Alle mogelijkheden zijn: 8 keer een 1 (1 mogelijkheid), 5 keer een 1 en een 3 (de 3 kan dan op 6 plaatsen staan, dus 6 mogelijkheden) of 2 keer een 1 en 2 keer een 3 (1133, 1313, 1331, 3113, 3131, 3311, dus 6 mogelijkheden). Totaal dus 13 mogelijkheden.

28. C PQ ligt op de middelloodlijn van de lijnstukken AB en CD. De afstand van P tot CD is volgens Pythagoras $\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3\cdot\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, waaruit volgt dat de afstand van P tot AB (en evenzo van Q tot CD) gelijk is aan $1-\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Hieruit volgt dat PQ gelijk is aan $1-2(1-\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1$.

29. D 1 t/m 9 komen allemaal precies één keer als tweede cijfer voor (bijvoorbeeld de 7 komt alleen in "17" als tweede cijfer voor). Dus elk cijfer van 1 t/m 9 kan as laatste cijfer van zo'n getal voorkomen, en met dat laatste cijfer ligt het hele getal vast. Er zijn dus 9 van zulke getallen. Het zijn: …46851, …34692, …46923, …69234, …34685, …92346, …68517, …23468, …23469.

30. B Noem de zijden a, b en c. De oppervlakte van de driehoek is 1, dus bij zijde a is de bijbehorende hoogte gelijk aan $\frac{2}{a}$. Evenzo voor b en c. We moeten dus gaan kijken naar $(a+b+c)(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c})$. Haakjes wegwerken en zoveel mogelijk samen nemen levert $6+2\frac{a}{b}+2\frac{a}{c}+2\frac{b}{a}+2\frac{b}{c}+2\frac{c}{a}+2\frac{c}{b}$.
Van de beide breuken $\frac{a}{b}$ en zijn omgekeerde $\frac{b}{a}$ is er zeker minstens een groter dan of gelijk aan 1. Dus moet het product minimaal 12 zijn en antwoord B kan dus niet waar zijn.