

Examen HAVO
2008

tijdvak 1
woensdag 28 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A1,2

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 80 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

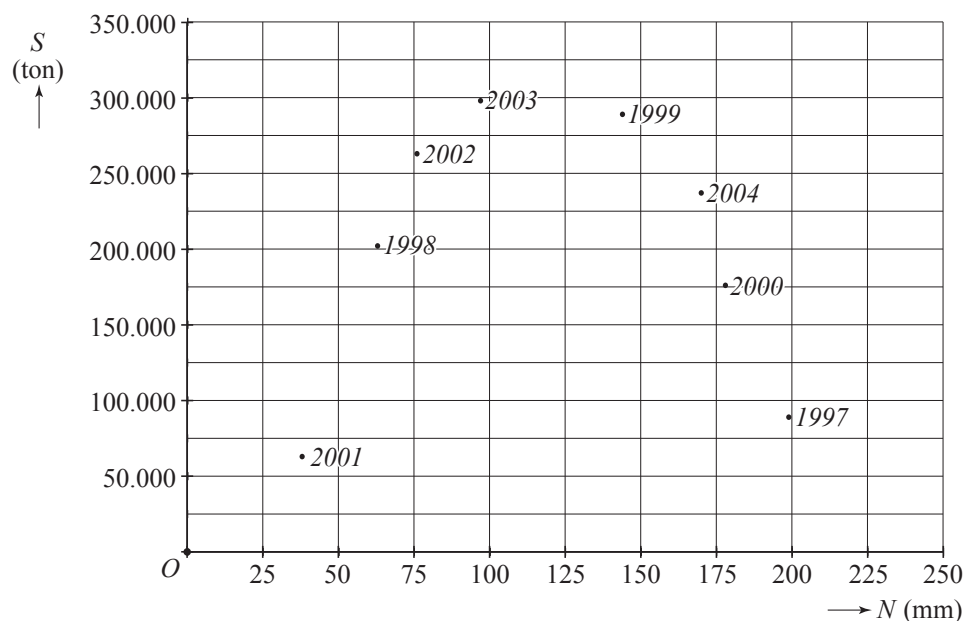
Suikerbieten

Een fabriek verwerkt alle geogste suikerbieten uit de omgeving tot suiker. Voor het plannen van de productie wil de fabriek graag een goede schatting hebben van de oogst aan suikerbieten.

De oogst blijkt vooral afhankelijk te zijn van de totale hoeveelheid neerslag in de maanden april tot en met september. Bij erg veel of erg weinig neerslag in deze maanden is de oogst kleiner.

In figuur 1 zie je gegevens over neerslag en oogst in de periode 1997 tot en met 2004. In deze periode bleef het totale oppervlak dat gebruikt werd voor de verbouw van suikerbieten ongewijzigd.

figuur 1



In de figuur is N de totale hoeveelheid neerslag in de maanden april tot en met september en S de omvang van de suikerbietenoogst.

De neerslag N is in millimeter, de omvang van de suikerbietenoogst S is in ton (1 ton = 1000 kg).

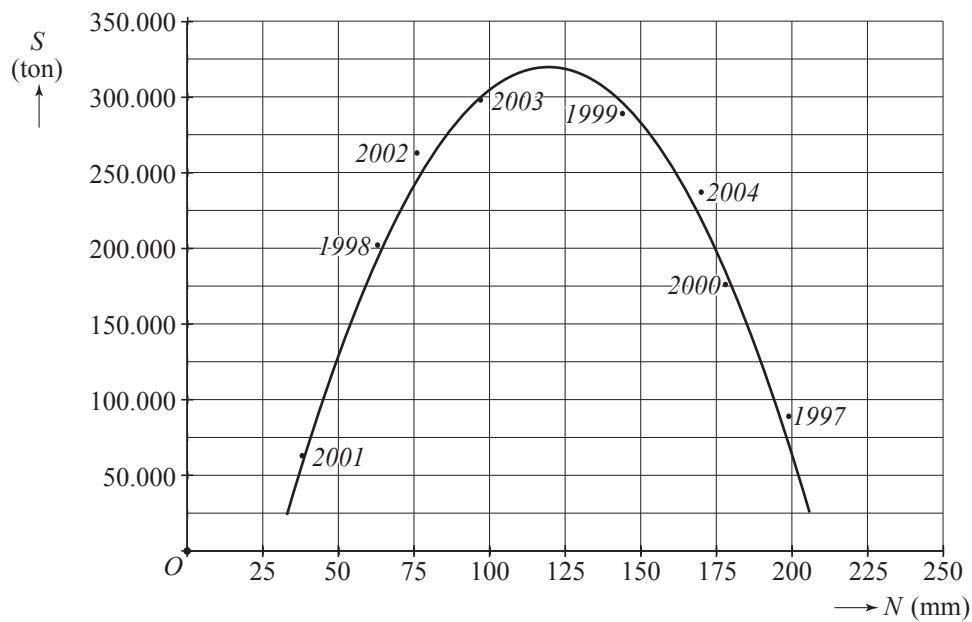
Je kunt in de figuur bijvoorbeeld aflezen dat in het jaar 1997 in de maanden april tot en met september bijna 200 mm neerslag viel en dat er in dat jaar 90 000 ton suikerbieten werd geogst.

In de periode april tot en met september 2004 viel er meer neerslag dan in die periode in 2003.

- 3p **1** Bereken hoeveel procent meer neerslag er viel.
- 3p **2** Bereken de omvang van de gemiddelde oogst in de periode 1997 tot en met 2004.

Er blijkt bij benadering een kwadratisch verband te bestaan tussen S en N . Je kunt dat ook in figuur 2 zien: de punten liggen bij benadering op een parabool.

figuur 2



Het verband wordt gegeven door de formule:

$$S = -39,5N^2 + 9450N - 245000$$

Als de oogst groter is dan 150 000 ton, moet de fabriek uitzendkrachten inhuren.

- 4p **3** Bereken met behulp van de formule hoeveel millimeter neerslag er dan gevallen moet zijn.

Op grond van de formule kun je voorspellen wanneer de oogst maximaal is.

- 5p **4** Stel de afgeleide van S op en bereken met behulp van die afgeleide bij welke hoeveelheid neerslag de oogst maximaal is.

Veel kinderen maken in het laatste jaar van de basisschool de Citotoets. De uitslag wordt gebruikt bij de keuze voor het type voortgezet onderwijs.

Iedere deelnemer krijgt een overzicht van de scores op de toets. In figuur 3 zie je het overzicht van Kim en haar uiteindelijke 'Standardscore'.

figuur 3

Resultaten	Taal	Rekenen- Wiskunde	Studievaar- digheden	Wereld- oriëntatie	Totaal	Standardscore
Aantal opgaven	100	60	40	90	290	
Aantal goed	73	48	23	52	196	536
Percentielscore	54	59	27	21	38	

De standardscore is gebaseerd op drie van de vier categorieën, namelijk Taal, Rekenen-Wiskunde en Studievaardigheden (in totaal 200 opgaven).

Er is een lineair verband tussen het totaal aantal goed beantwoorde opgaven van deze drie categorieën en de standardscore. Bij 0 opgaven goed is de standardscore 500, bij alle 200 opgaven goed is de standardscore 550.

Zoals je ziet in figuur 3 had Kim 144 opgaven goed in de eerste drie categorieën (73 + 48 + 23), wat haar een standardscore van 536 opleverde.

De standardscore wordt afgerond op een geheel getal.

Tarik heeft bij Taal 79 opgaven goed, bij Rekenen-Wiskunde 51 en bij Studievaardigheden 27.

4p **5** Bereken de standardscore van Tarik.

Arno heeft in de categorie Rekenen-Wiskunde 52 opgaven goed beantwoord en in de categorie Studievaardigheden 33. Zijn standardscore is daarmee 541.

Er zijn verschillende scores in de categorie Taal mogelijk, waarbij Arno's standardscore afgerond wordt op 541.

5p **6** Geef alle mogelijke scores die Arno in de categorie Taal kan hebben gehad. Licht je antwoord toe.

Ga er in de volgende twee vragen van uit dat de scores voor elke categorie bij benadering normaal verdeeld zijn.

In de Citotoets van 2004 zaten 100 opgaven in de categorie Taal. Kim had er daarvan 73 goed. In figuur 3 staat dat haar **percentielscore** 54 is. Deze percentielscore van 54 betekent dat 54% van alle kinderen 73 opgaven of minder goed had.

Van de Citotoets van 2004 is bekend dat in de categorie Studievaardigheden het aantal goed beantwoorde opgaven gemiddeld 27,6 was met een standaardafwijking van 6,6. Anneke had in deze categorie 21 opgaven goed.

4p **7** Bereken de percentielscore van Anneke.

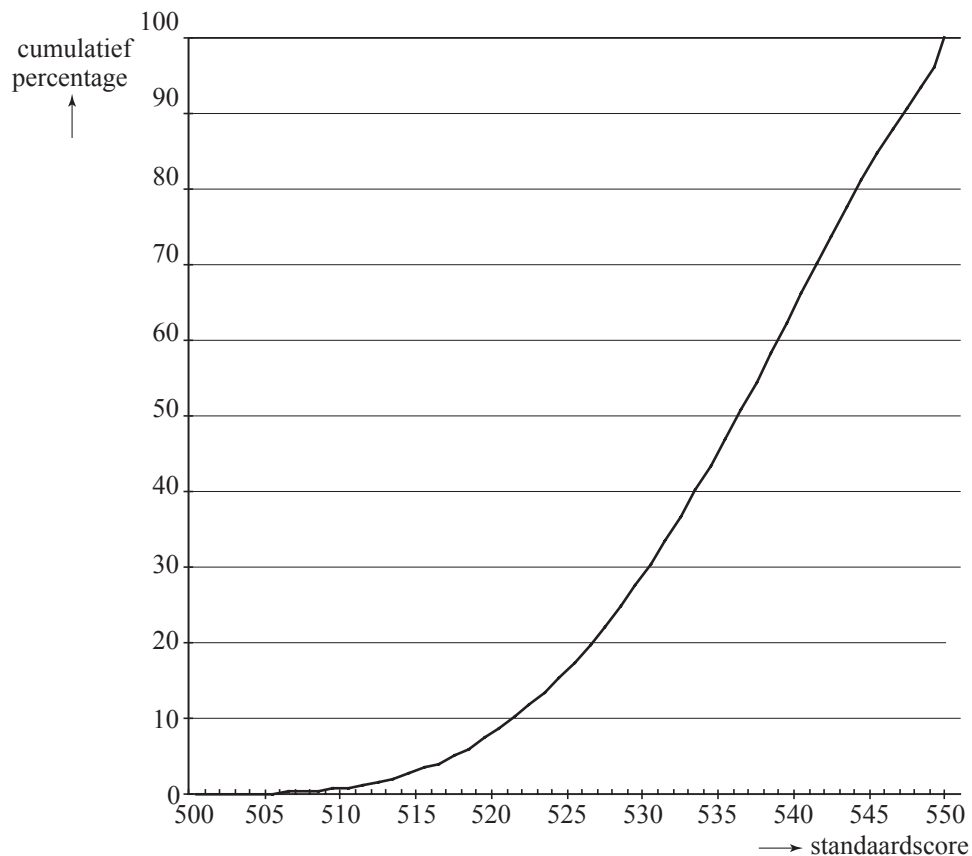
Kim had 48 opgaven goed in de categorie Rekenen-Wiskunde. Dat gaf een percentielscore van 59.

Voor Rekenen-Wiskunde was de standaardafwijking 8,4.

- 4p **8** Bereken het gemiddelde aantal goed beantwoorde opgaven bij Rekenen-Wiskunde. Rond je antwoord af op een geheel getal.

In figuur 4 zie je de cumulatieve frequentiepolygoon van de standardscore op de Citotoets van 2004. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 4



- 5p **9** Teken op de uitwerkbijlage met behulp van figuur 4 een boxplot van de standardscores op de Citotoets van 2004. Op de uitwerkbijlage staat al een schaalverdeling voor je boxplot.

Olie

Er wordt door mensen veel olie verbruikt. Gelukkig wordt er nog regelmatig nieuwe olie gevonden, maar ooit zal de olie opraken.

Onder de **reserves** verstaan we de hoeveelheid olie die naar schatting nog uit de grond gehaald kan worden.

Onder de **consumptie** verstaan we de hoeveelheid olie die echt gebruikt wordt. Hoeveelheden olie worden uitgedrukt in vaten. Eén vat bevat 159 liter olie.

In 2003 was de olieconsumptie in de Verenigde Staten 20 071 000 vaten per dag. In 2003 had de Verenigde Staten ongeveer 293 miljoen inwoners.

- 3p **10** Bereken de olieconsumptie in de Verenigde Staten in 2003 in liter per inwoner per dag.

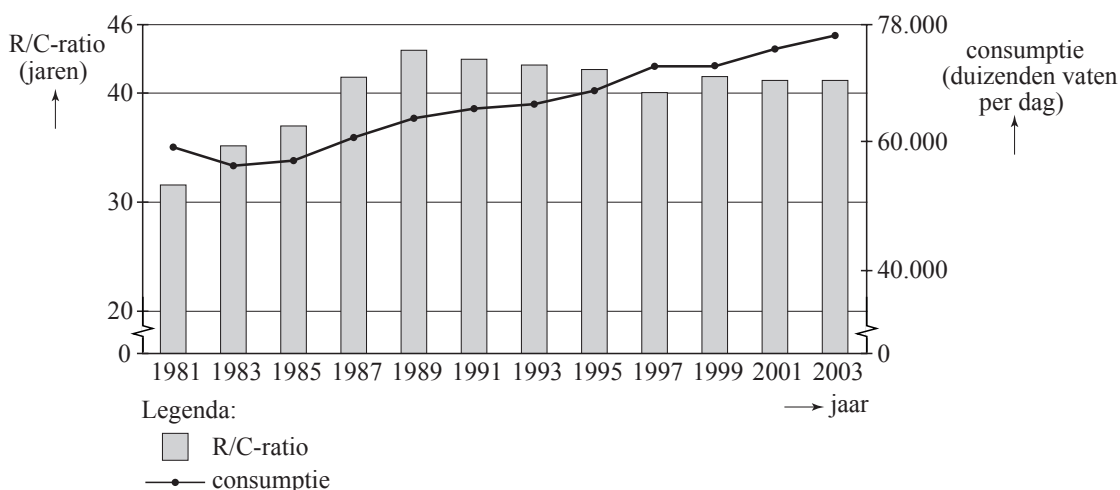
Aan het eind van 2003 waren de reserves in de hele wereld 1147,7 miljard vaten. Als de wereldconsumptie per dag steeds gelijk zou blijven aan die van 2003, dan zouden deze reserves 41 jaar later helemaal verbruikt zijn: er is dan geen olie meer.

- 3p **11** Bereken hoeveel vaten olie er per dag in de wereld geconsumeerd werden in 2003. Geef je antwoord in miljoenen.

De grootte van de reserves verandert voortdurend, omdat er enerzijds olie vanaf gaat voor de consumptie en er anderzijds nog steeds nieuwe olievelden worden gevonden. Oliemaatschappijen letten daarom op de zogenaamde R/C-ratio, ofwel de verhouding tussen de reserves (R) en de consumptie (C) per jaar.

Figuur 5 geeft voor een aantal jaren zowel de R/C-ratio (in jaren, linker-as) als de consumptie (in duizenden vaten per dag, rechter-as).

figuur 5



In figuur 5 is te zien dat in de periode 1999-2003 de R/C-ratio ongeveer gelijk is gebleven.

- 3p **12** Zijn de reserves in deze periode toegenomen of afgenomen? Verklaar je antwoord.

De consumptie van olie is niet op het niveau van 2003 gebleven. Eind 2003 heeft men geprobeerd voorspellingen te doen over het tijdstip waarop er geen olie meer is. Er zijn toen twee situaties vergeleken: één waarin de consumptie lineair toeneemt, en één waarin de consumptie exponentieel toeneemt.

Lineaire toename van de consumptie

De olieconsumptie in de hele wereld in het jaar 2003 bedroeg 28,02 miljard vaten. Dat was 0,54 miljard vaten meer dan in 2002.

Neem aan dat er vanaf 2003 elk jaar 0,54 miljard vaten méér worden geconsumeerd, ofwel de jaarlijkse consumptie neemt lineair toe.

Met de volgende formule is dan de cumulatieve olieconsumptie vanaf 2004 TC_{lin} (in miljarden vaten) te berekenen.

$$TC_{lin} = 28,29n + 0,27n^2$$

met $n = 1$ in 2004, $n = 2$ in 2005, enzovoort.

Je kunt dus, door $n = 3$ in te vullen in deze formule, berekenen dat er in de jaren 2004, 2005 en 2006 samen 87,3 miljard vaten zijn geconsumeerd.

We nemen aan dat er geen nieuwe reserves meer worden gevonden. We moeten het dus doen met de 1147,7 miljard vaten aan oliereserves die we eind 2003 nog hadden.

- 4p **13** Bereken hoeveel jaar na 2003 de reserves helemaal verbruikt zijn.

Exponentiële toename van de consumptie

In de jaren vóór 2003 steeg de jaarlijkse olieconsumptie in China nagenoeg exponentieel. De Chinese regering verwachtte dat de olieconsumptie exponentieel zou blijven toenemen en in de volgende 10 jaar zou verdubbelen van 6,1 miljoen vaten per dag naar 12,2 miljoen vaten per dag.

- 4p **14** Bereken met hoeveel procent per jaar de jaarlijkse olieconsumptie dan toeneemt.

Het was niet zo vreemd om te veronderstellen dat in de hele wereld de jaarlijkse olieconsumptie na 2003 exponentieel zou toenemen.

De consumptie was 28,02 miljard vaten in het jaar 2003. Dit was 1,97% hoger dan in 2002.

Neem aan dat de olieconsumptie vanaf 2003 elk jaar met 1,97% toeneemt.

Met de volgende formule is dan de cumulatieve olieconsumptie vanaf 2004 TC_{exp} (in miljarden vaten) te berekenen.

$$TC_{exp} = 1450,43 \cdot (1,0197^n - 1)$$

met $n = 1$ in 2004, $n = 2$ in 2005, enzovoort.

We weten al dat eind 2003 de reserves 1147,7 miljard vaten waren. We nemen aan dat na 2003 ieder jaar 15,8 miljard vaten worden toegevoegd aan de reserves.

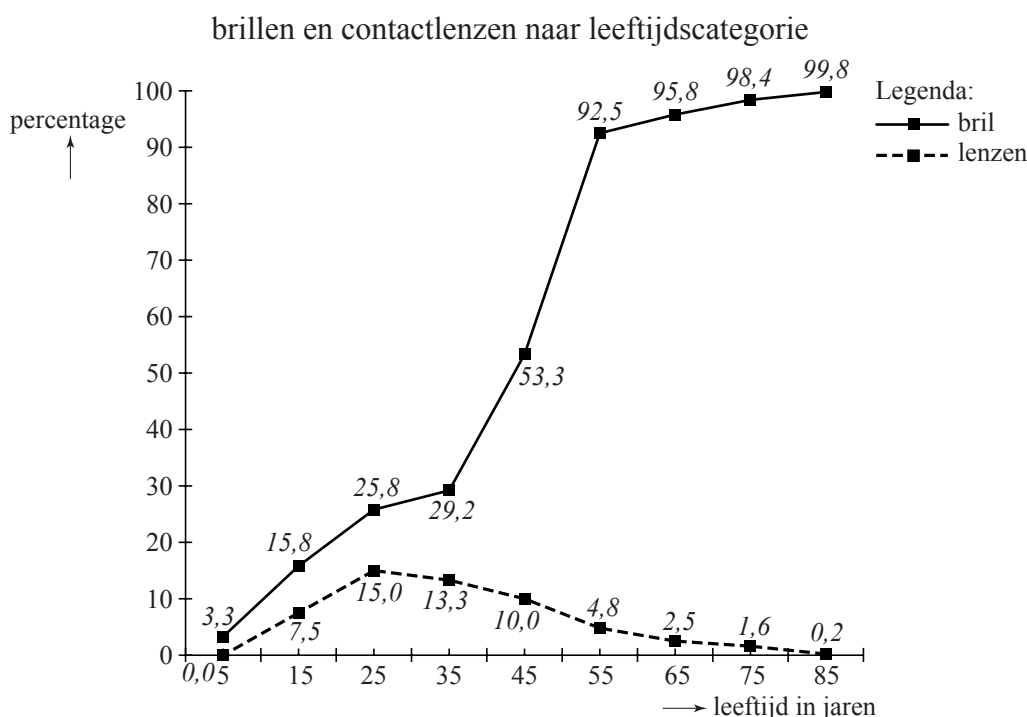
- 5p **15** Bereken hoeveel jaar na 2003 de reserves helemaal verbruikt zijn.

Niemand ontkomt aan de bril

Ruim de helft van alle Nederlanders heeft een bril of contactlenzen. Het gebruik neemt nog steeds toe, want de bevolking vergrijsst en boven de 60 jaar heeft bijna iedereen een bril of contactlenzen.

In figuur 6 zie je per leeftijdscategorie het percentage bril dragers en het percentage contactlens dragers. In de figuur zijn de klassenmiddens vermeld. Zo kun je bijvoorbeeld aflezen dat 15,8% van de mensen uit de leeftijdscategorie 10 tot 20 jaar (klassenmidden 15) een bril draagt en 7,5% contactlenzen.

figuur 6



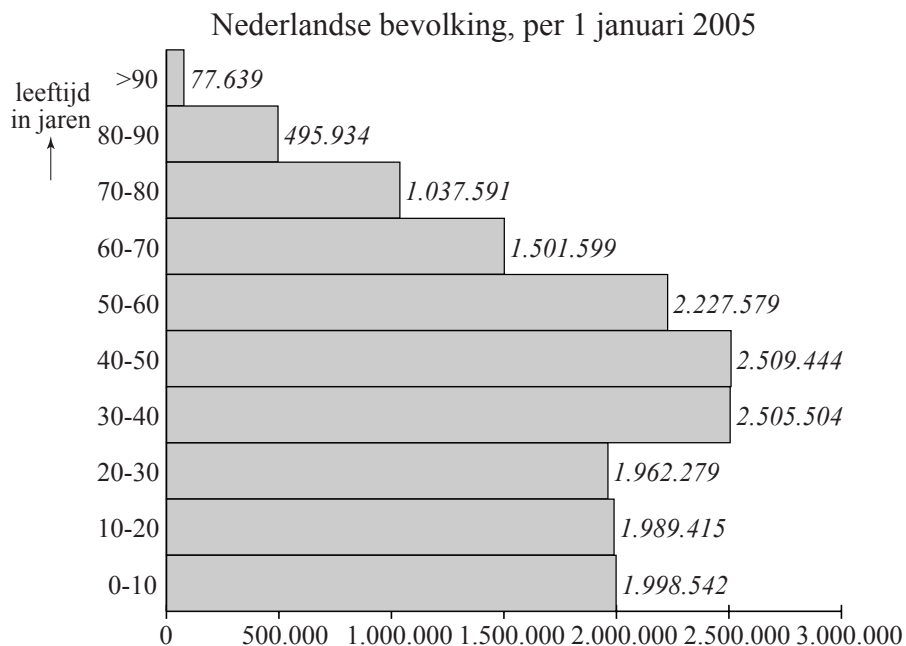
Bril en contactlenzen worden ook wel **gezichtshulpmiddelen** genoemd. In deze opgave gaan we ervan uit dat er geen mensen zijn die zowel een bril als contactlenzen dragen. Verder nemen we aan dat als je eenmaal een gezichtshulpmiddel gebruikt, je dat voor de rest van je leven gebruikt. Er zijn wel mensen die overstappen van een bril naar contactlenzen en omgekeerd. Tot slot gaan we ervan uit dat de percentages die bij de leeftijdscategorieën horen door de jaren heen niet veranderen.

De leeftijdscategorie '30 tot 40 jaar' bevat ongeveer even veel mensen als de leeftijdscategorie '40 tot 50 jaar'.

- 3p 16 Toon aan dat 20,8% van de mensen tussen de 40 en 50 jaar voor het eerst gebruik gaat maken van een gezichtshulpmiddel.

In figuur 7 staat de leeftijdsopbouw van de totale Nederlandse bevolking in 2005.

figuur 7



- 5p **17** Bereken met behulp van figuur 6 en figuur 7 hoeveel méér mensen met een gezichtshulpmiddel er zijn in de leeftijdscategorie '30 tot 40 jaar' dan in de leeftijdscategorie '20 tot 30 jaar'. Rond je antwoord af op een honderdtal.

De schoolartsen in Nederland controleren alle 14-jarige scholieren op hun gezondheid. Ze controleren ook de ogen van de scholieren. Van de scholieren die op dat moment nog geen gezichtshulpmiddel hebben, ziet 5% zo slecht dat bril of contactlenzen nodig zijn.

Er worden 50 leerlingen van 14 jaar oud willekeurig aangewezen die naar de schoolarts moeten. Ze hebben allemaal nog geen gezichtshulpmiddel.

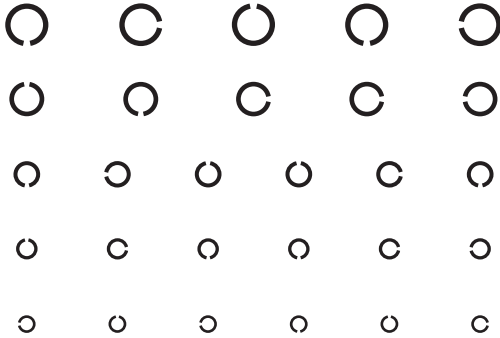
- 3p **18** Bereken de kans dat geen van die 50 leerlingen een gezichtshulpmiddel nodig heeft.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Figuur 8 komt je misschien bekend voor. Het is een poster met een eenvoudige ogentest. Elke rij heeft vijf of zes cirkels met één opening. Als je omlaag gaat, worden de cirkels steeds kleiner. Bij de ogentest sta je op 5 meter afstand van de poster. Je kijkt met één oog. De arts wijst steeds een cirkel aan en jij moet zeggen waar de opening zit: boven, onder, links of rechts.

Hoe lager de rij die je nog kunt 'lezen', hoe beter je oog.

figuur 8



In elke cirkel kan de opening dus boven, onder, links of rechts zitten. Het is niet nodig dat alle mogelijke openingen in één rij voorkomen. Dus een rij met bijvoorbeeld alle zes openingen boven mag ook.

3p **19** Bereken hoeveel verschillende rijen van zes cirkels mogelijk zijn.

We bekijken rijen van zes cirkels, waarbij vier cirkels de opening boven en twee cirkels de opening rechts hebben.

3p **20** Bereken hoeveel van zulke rijen er mogelijk zijn.

Bram doet de ogentest. De arts gaat als volgt te werk: hij wijst eerst een cirkel in de bovenste rij aan en vraagt waar de opening zit. Wanneer Bram het juiste antwoord geeft, gaat hij een rij lager.

Bram ziet heel slecht en kan de bovenste rij cirkels al niet 'lezen'. Hij gokt daarom steeds waar de opening zit.

4p **21** Bereken de kans dat Bram pas in de vijfde rij in de fout gaat.