

Voor dit examen zijn maximaal 87 punten te behalen; het examen bestaat uit 21 vragen.  
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.  
Voor de uitwerking van vraag 6 is een bijlage toegevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

# Wachtlijsten

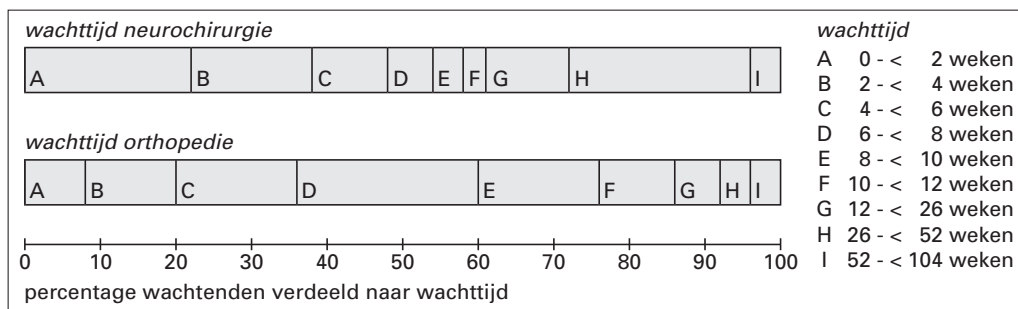
In de gezondheidszorg staan veel mensen op een wachtlijst, bijvoorbeeld voor een behandeling in een ziekenhuis of voor een plaats in een verzorgingshuis.

De regering wil dat minder mensen op een wachtlijst staan. Ook wil men dat mensen die op een wachtlijst staan, minder lang hoeven te wachten.

Voor alle specialismen, waaronder neurochirurgie en orthopedie, heeft men de wachtlijsten in kaart gebracht. Men heeft bekeken hoeveel mensen op een wachtlijst staan en hoelang ze moeten wachten.

In figuur 1 staat een weergave van de *wachttijd* bij neurochirurgie en bij orthopedie.

figuur 1



In deze figuur kun je bijvoorbeeld over de wachtenden op een behandeling bij neurochirurgie aflezen:

- bijna 40% van de mensen is binnen 4 weken aan de beurt,
- meer dan 25% moet 26 weken of langer wachten.

3p **1**  Hoeveel procent van de wachtenden bij neurochirurgie moet tussen de 4 en de 10 weken wachten? Licht je antwoord toe.

Bij neurochirurgie is de gemiddelde wachttijd 17 weken. Bij orthopedie is de gemiddelde wachttijd korter. Met behulp van de klassenmiddens van de klassen A tot en met I van orthopedie kan dat gemiddelde worden geschat.

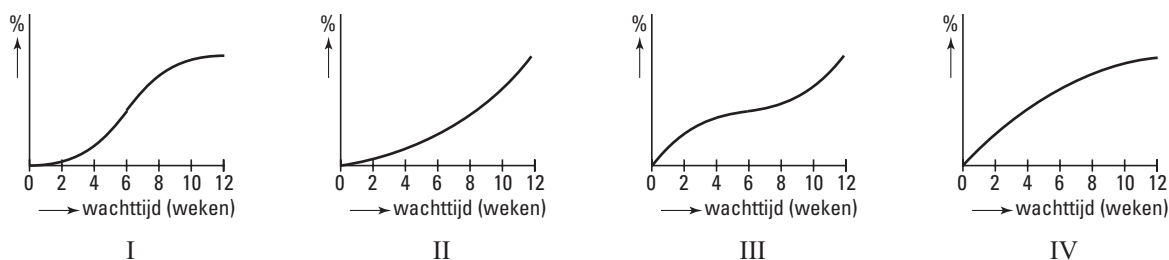
5p **2**  Bereken met behulp van de klassenmiddens de gemiddelde wachttijd bij orthopedie. Geef je antwoord in gehele weken.

Aan de hand van figuur 1 kun je met behulp van lineaire interpolatie een schatting geven van het derde kwartiel van de wachttijd bij neurochirurgie.

4p **3**  Bereken op deze manier dit derde kwartiel. Geef je antwoord in gehele weken.

In figuur 2 zijn vier cumulatieve frequentiepolygonen (I, II, III en IV) voor de eerste 12 weken getekend.

figuur 2



3p **4**  Welke van deze vier cumulatieve frequentiepolygonen past het best bij de wachttijden tot 12 weken bij neurochirurgie uit figuur 1? Licht je antwoord toe.

Op een dag besluiten Dirk en Petra uit havo 4 dat er wat meer leven in de brouwerij moet komen. Ze richten daarvoor een genootschap op: het *Geheim Genootschap voor Gezellige Dingen* (GGGD). Dit genootschap gaat gezellige dingen organiseren voor al zijn leden.

Bij de oprichting bestaat het GGGD dus uit twee leden: Dirk en Petra. Ze spreken af dat het GGGD elke maand zal worden uitgebreid met één nieuw lid. Om te bepalen of het nieuwe lid een meisje of een jongen zal zijn, doen ze elke maand het *vaasspel*. Dat gaat als volgt:

- elk lid stopt een bal in de vaas, de jongens een rode bal en de meisjes een witte bal;
- uit de vaas wordt willekeurig een bal gepakt;
- is de bal rood, dan wordt een jongen het nieuwe lid; is de bal wit, dan komt er een meisje bij.

Als ze het vaasspel de eerste keer spelen, is de kans 50% dat het nieuwe lid een meisje is, want er is één rode en één witte bal.

Als ze een maand later het vaasspel voor de tweede keer spelen, is de kans op een meisje niet meer 50%, want er zijn nu drie leden. Is dat derde lid een meisje, dan zijn twee van de drie ballen wit. En als dat derde lid een jongen is, dan is maar één van de drie ballen wit.

Na twee maanden zal het GGGD bestaan uit vier leden: Dirk, Petra en de twee die er bijkomen.

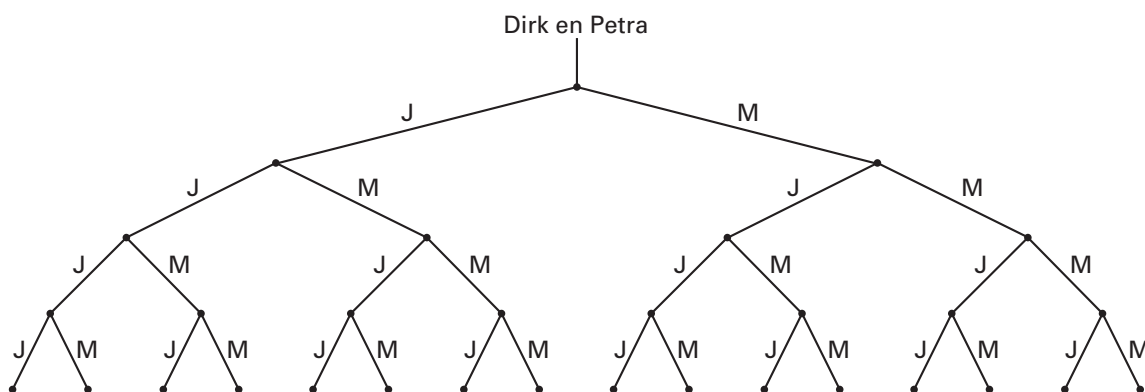
Er zijn drie mogelijkheden:

- er komen twee meisjes bij;
- er komen twee jongens bij;
- er komen één meisje en één jongen bij.

5p **5** □ Toon aan met een berekening dat deze drie mogelijkheden een even grote kans hebben.

Nog twee maanden later zal het GGGD uit zes leden bestaan. Er zijn dan immers vier nieuwe leden bijgekomen. Figuur 3 laat de mogelijke volgordes zien waarin het genootschap, opgericht door Dirk en Petra, kan worden uitgebreid met vier nieuwe leden. Deze figuur staat ook op de bijlage.

figuur 3



Er zijn verschillende volgordes waarbij er in vier maanden twee meisjes en twee jongens bijkomen. Twee van die volgordes zijn bijvoorbeeld JJMM en MJMJ.

5p **6** □ Laat zien dat de kans op JJMM even groot is als de kans op MJMJ. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de bijlage.

Na acht maanden vindt Dirk het niet leuk meer. Hij denkt dat er vals gespeeld is, want alle acht nieuwe leden zijn meisjes.

Dirk had bij de oprichting van het GGGD de kans kunnen berekenen dat er na acht maanden acht meisjes bijgekomen zullen zijn.

5p **7** □ Laat met een berekening zien dat die kans groter is dan 10%.

## Doosjes verzenden

Een ondernemer gaat via internet cd's verkopen. Hij doet daarom een onderzoek naar de verzendkosten.

Voor pakjes die door de brievenbus kunnen, gelden andere posttarieven dan voor pakjes die niet door de brievenbus kunnen. Een pakje kan door de brievenbus als het niet langer is dan 38 cm én niet breder dan 26,5 cm én niet dikker dan 3,2 cm.

In tabel 1 staan de posttarieven van januari 2002 vermeld in euro's.

tabel 1

	kan door brievenbus max. 38 × 26,5 × 3,2	kan niet door brievenbus
0 – 20 gram	0,39	4,88
20 – 50 gram	0,78	4,88
50 – 100 gram	1,17	4,88
100 – 250 gram	1,56	4,88
250 – 500 gram	2,25	4,88
500 gram – 3 kg	3,00	4,88

De afmetingen en het gewicht van cd's (inclusief hoesje of plastic doosje) staan in tabel 2.

tabel 2

	lengte (mm)	breedte (mm)	dikte (mm)	gewicht (gram)
single-cd (in kartonnen hoesje)	124	124	2	24
maxisingle-cd (in plastic doosje)	142	125	7	68
gewone cd (in plastic doosje)	142	125	10	97
dubbel-cd (in plastic doosje)	142	125	10	112

Om de cd's als een pakje te kunnen verzenden, worden ze in een kartonnen doos verpakt. Als er meer cd's in één kartonnen doos worden verpakt, worden de cd's altijd *op elkaar* gelegd.

Het karton van de dozen is 1 mm dik, waardoor een pakje 2 mm dikker wordt. Neem voor het gemak aan dat de kartonnen doos altijd precies om de cd's past en dat de doos, ongeacht de grootte, altijd 28 gram weegt.

Een klant doet een bestelling van 2 maxisingle-cd's, 1 gewone cd en 1 dubbel-cd. Met de tabellen 1 en 2 kunnen de verzendkosten worden berekend.

4p **8**  Bereken het bedrag aan verzendkosten als deze bestelling in *één* doos wordt verzonden.

Je kunt de bestelling ook over twee of meer dozen verdelen en die apart verzenden. Misschien is dat wel goedkoper.

5p **9**  Onderzoek of het mogelijk is om de bestelling van deze klant te verzenden voor minder dan 3,50 euro.

Als het bedrijfje een half jaar bestaat, is het aantal bestellingen opgelopen tot zo'n 80 per week. De ondernemer onderzoekt of het goedkoper is om de pakjes voortaan per partijenpost te verzenden. Bij het verzenden per partijenpost worden alle pakjes van een week tegelijk aangeboden om te verzenden. In tabel 3 staan de gegevens die nodig zijn om te berekenen wat hij dan aan verzendkosten kwijt is.

tabel 3

	gemiddeld gewicht per pakje	
	0 – 10 kg	10 – 30 kg
vast bedrag per pakje	€ 4,50	€ 5,47
tarief per kg	€ 0,26	€ 0,17

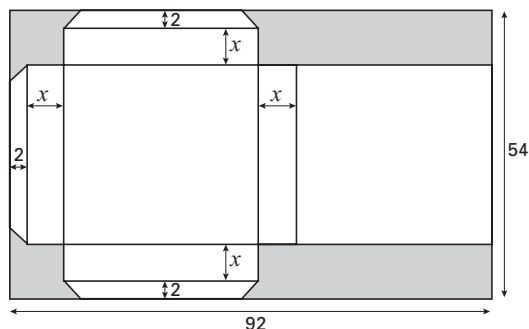
Er zijn hier dus twee gewichtsklassen: 0 – 10 kg en 10 – 30 kg. Welke daarvan van toepassing is, wordt bepaald door het gemiddelde gewicht van de pakjes. In elke gewichtsklasse betaalt men een vast bedrag per pakje en daar bovenop een bedrag afhankelijk van het gewicht van het pakje.

De ondernemer stuurt de eerstvolgende week de pakjes per partijenpost. Hij verzendt dan 82 pakjes die allemaal niet door de brievenbus kunnen, met een gemiddeld gewicht van 539 gram. Geen van de pakjes weegt meer dan 3 kg.

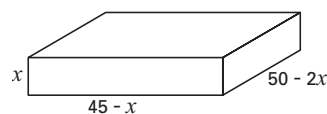
5p **10** □ Hoeveel bespaart hij die week aan verzendkosten? Licht je antwoord toe.

De leverancier van de kartonnen dozen is een bedrijf dat dozen maakt in verschillende modellen, niet alleen voor de verzending van cd's. De meeste van die modellen worden gemaakt uit een stuk karton met de standaardafmetingen 54 cm bij 92 cm. Zie figuur 4.

figuur 4



figuur 5



De drie plakranden zijn allemaal 2 cm breed. De hoogte van de dozen die hiervan gemaakt kunnen worden, is instelbaar op de snijmachine. Deze variabele hoogte noemen we  $x$ . Bij het snijden van de doos uit het stuk karton worden de grijze delen weggesneden. Na het vouwen en plakken krijg je een doos zoals in figuur 5.

De inhoud van deze doos wordt gegeven door de formule:

$$\text{inhoud} = x(45 - x)(50 - 2x) \quad \text{voor} \quad 0 < x < 25$$

In deze formule is de hoogte  $x$  in cm en de inhoud in  $\text{cm}^3$ .

Er zijn twee verschillende modellen dozen met een inhoud van  $5000 \text{ cm}^3$ .

5p **11** □ Bereken van beide modellen de afmetingen.

3p **12** □ Bereken de maximale inhoud van een doos die uit zo'n stuk karton gemaakt kan worden.

## Remweg

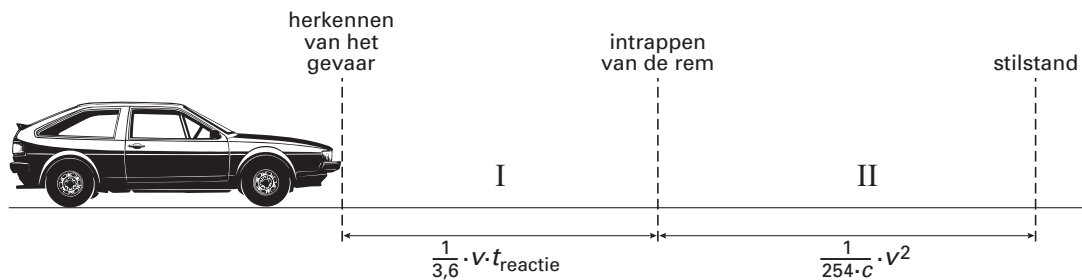
In de ergenis-top-10 van automobilisten staat bumperkleven hoog genoteerd. Automobilisten vinden het blijkbaar nogal ergerlijk als andere automobilisten op zeer korte afstand achter hen rijden.

Voor het bepalen van een veilige afstand tussen twee auto's bekijkt men vaak de *remweg*. Dat is de afstand die een automobilist nodig heeft om, vanaf het moment dat hij gevaar herkent, zijn auto tot stilstand te brengen.

De remweg bestaat uit twee gedeelten:

- I de afstand die wordt afgelegd tussen het moment van het herkennen van het gevaar en het moment van het intrappen van de rem
  - II de afstand die remmend wordt afgelegd tot de auto stilstaat
- In figuur 6 worden deze gedeelten verduidelijkt.

figuur 6



De formule voor de remweg bestaat dus ook uit twee gedeelten (zie figuur 6):

$$r = \frac{1}{3,6} \cdot v \cdot t_{\text{reactie}} + \frac{1}{254 \cdot c} \cdot v^2$$

Hierin is:

- $r$  de remweg in meters
- $v$  de snelheid in km/uur
- $t_{\text{reactie}}$  de reactietijd in seconden, dat wil zeggen de tijd tussen het moment van het herkennen van het gevaar en het moment van het intrappen van de rem
- $c$  de wrijvingscoëfficiënt tussen de weg en de banden

Voor een aantal wegtypen en weersomstandigheden geeft tabel 4 enkele waarden van  $c$ .

tabel 4

<b>Droog</b> wegdek	Nieuwe banden	Oude banden
Beton	0,85	0,95
Asfalt	0,80	0,90
Zandweg	0,50	0,50

<b>Nat</b> wegdek	Nieuwe banden	Oude banden
1 mm water	0,55	0,40
2 mm water	0,45	0,30
IJs	0,10	0,10

Een automobilist rijdt met nieuwe banden onder zijn auto op een droog wegdek van beton met een snelheid van 50 km/uur. Zijn reactietijd is 0,4 seconden.

- 3p **13** □ Toon met een berekening aan dat zijn remweg ruim 17 meter is.

Een automobiliste rijdt met een snelheid van 60 km/uur op oude banden in een regenbui, waardoor er 1 mm water op de weg ligt. Het begint harder te regenen: de hoeveelheid water op de weg neemt toe tot 2 mm. Haar reactietijd blijft 0,3 seconden.

- 4p **14**  Bereken met hoeveel procent haar remweg toeneemt als zij haar snelheid niet aanpast.

In het vervolg van deze opgave geldt  $t_{\text{reactie}} = 0,5$  en  $c = 0,75$ .

De formule voor de remweg wordt dan gegeven door:

$$r = 0,14 \cdot v + 0,005 \cdot v^2$$

Men zegt wel eens dat bij lage snelheden de reactietijd de belangrijkste bijdrage levert aan de remweg, terwijl bij hoge snelheden de snelheid de belangrijkste bijdrage levert.

- 4p **15**  Bij welke snelheid is de bijdrage aan de remweg als gevolg van de reactietijd net zo groot als de bijdrage aan de remweg als gevolg van het remmen? Licht je antwoord toe.
- 4p **16**  Stel de afgeleide van  $r$  op, bereken de waarde van die afgeleide voor  $v = 120$  en leg uit wat dit getal betekent voor de remweg.

## Euromunten

Toen in januari 2002 de gulden werd vervangen door de euro, was dat een hele operatie. Zo moesten alle banken en winkels worden bevoorrad met de nieuwe euromunten en moesten alle automaten worden aangepast. De omschakeling verliep overigens vrij soepel.

Van elk van de acht verschillende euromunten is de diameter normaal verdeeld. Zo hebben de munten van 1 euro een gemiddelde diameter van 23,25 mm met een standaardafwijking van 0,10 mm.

- 4p **17**  Bereken hoeveel procent van de munten van 1 euro een diameter heeft van meer dan 23,40 mm.

De diameter van de munt van 2 euro is gemiddeld 25,75 mm.

Een automaat is zo nauwkeurig afgesteld dat een munt van 2 euro wordt geweigerd als deze meer dan 0,40 mm van het gemiddelde afwijkt.

In de automaat worden 10 000 willekeurige munten van 2 euro gedaan.

De automaat weigert daarvan 3 munten met een te kleine diameter en ook 3 munten met een te grote diameter.

- 5p **18**  Bereken op grond van deze gegevens de standaardafwijking van de diameter van de munt van 2 euro. Geef je antwoord in 2 decimalen.

*Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.*

## Concentratie van vloeistoffen

Een vloeistof wordt bewaard in een vat. Na het gebruik van de vloeistof is het vat nooit helemaal leeg. Om het vat weer te kunnen gebruiken, moet het eerst worden schoongespoeld.

In figuur 7 zie je hoe dat gedaan wordt. Onderin het vat zit nog een restant vloeistof. Via de pijp linksonder wordt een spoelmiddel in het vat gepompt. Het restant vloeistof vermengt zich met het spoelmiddel.

Na een tijdje is het vat vol. Maar het erin pompen van het spoelmiddel gaat door en zo stromen spoelmiddel en vloeistof het vat weer uit via de uitgang rechtsboven. Het spoelen gaat door tot er (vrijwel) niets meer over is van de oorspronkelijke vloeistof.

figuur 7



Het vat van figuur 7 heeft een inhoud van 400 liter. Onderin zit nog 0,8 liter vloeistof en daarin zit 20 000 mg van een chemische stof.

Het spoelmiddel wordt met 25 liter per minuut in het vat gepompt.

Onder de *concentratie*  $C$  wordt verstaan: de hoeveelheid chemische stof in milligram per liter vloeistof.

Tijdens het vollopen van het vat geldt voor  $C$  de formule:

$$C = \frac{20000}{0,8 + 25s}$$

Hierin is  $s$  de tijd in minuten. Op  $s = 0$  begint het pompen van het spoelmiddel in het vat. Deze formule geldt tot het vat vol is, dus tot het moment dat het uitstromen begint.

3p 19  Leg uit waarom deze formule juist is.

Als het vat vol is, stroomt er evenveel het vat uit als het vat in. De concentratie van de chemische stof neemt nu exponentieel af.

We noemen de tijd in minuten  $t$ . Op  $t = 0$  is het vat vol en begint het uitstromen.

Op  $t = 0$  is de 20 000 mg chemische stof inmiddels opgelost in 400 liter vloeistof.

Daardoor is de concentratie op dat tijdstip nog maar 50 mg per liter.

In tabel 5 zie je de concentratie  $C$  van de chemische stof voor enkele waarden van  $t$ .

tabel 5

$t$ (in minuten)	0	4	8	12
$C$ (in milligram per liter)	50,00	38,94	30,32	23,61

3p 20  Bereken de groeifactor per minuut van dit exponentiële proces. Geef je antwoord in vier decimalen.

Een maand later moet het vat opnieuw worden schoongespoeld. Op de bodem van het vat bevindt zich 10 000 mg droge chemische stof. Verder is het vat leeg.

Men pompt met een snelheid van 25 liter per minuut het spoelmiddel in het vat. De chemische stof vermengt zich met het spoelmiddel. Als het vat vol is, gaat men door met pompen tot de concentratie uiteindelijk nog maar 1 milligram per liter is.

Voor de concentratie  $C$  van het volle vat geldt de formule:

$$C = 25 \cdot 0,94^t$$

Hierin is  $t$  de tijd in minuten, gerekend vanaf het begin van het uitstromen.

5p 21  Hoeveel minuten duurt het pompen in totaal tot de concentratie 1 milligram per liter is? Licht je werkwijze toe en geef je antwoord in gehele minuten.

Einde